

## SUATU KAJIAN ANALITIS PADA SISTEM PERSAMAAN AIR DANGKAL

Sudi Mungkasi  
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Sanata Dharma  
sudi@usd.ac.id

### Abstrak

Makalah ini mengkaji sistem persamaan air dangkal secara analitis. Dua bentuk sistem persamaan air dangkal dibuktikan ekuivalen. Sifat hiperbolik, karakteristik, gelombang sederhana, pertidaksamaan entropi, dan gelombang shock dipaparkan.

**Kata kunci :** persamaan air dangkal, sistem hiperbolik, gelombang sederhana, pertidaksamaan entropi, gelombang shock

### PENDAHULUAN

Sistem persamaan air dangkal telah dipelajari sejak tahun 1800-an. Beberapa artikel terkenal yang ditulis pada masa itu yang membahas masalah tersebut diantaranya dikarang oleh Saint-Venant (1871) tentang aliran air dangkal dan Ritter (1892) tentang aliran air dari bendungan. Sejak masa itu sistem ini dikembangkan secara luas hingga saat ini. Terapan sistem ini cukup banyak, meliputi: bendungan-bobol (Ritter, 1892; Chanson, 2006), perambatan tsunami (Ying dkk, 2007), aliran air sungai (Jakeman, 2006), banjir (Wang dkk, 2010), dan lain-lain.

Makalah ini dapat digunakan sebagai bahan referensi yang sekiranya berguna untuk tujuan pedagogi. Pembahasan dalam makalah ini meliputi bentuk-bentuk sistem persamaan air dangkal yang sering kali muncul dalam referensi, sifat hiperbolik dari sistem, karakteristik dari sistem, makna gelombang sederhana menurut karakteristik yang ada, pertidaksamaan entropi untuk sistem, dan kondisi terjadinya gelombang shock.

Selanjutnya, makalah ini terdiri atas empat bagian. Bagian SISTEM PERSAMAAN AIR DANGKAL (SPAD) membahas dua bentuk sistem persamaan air dangkal yang ekuivalen satu sama lain. Bagian SPAD SEBAGAI SISTEM HIPERBOLIK memberikan bukti bahwa SPAD benar-benar merupakan sistem hiperbolik. Bagian SIFAT-SIFAT SPAD memuat sifat-sifat yang dimiliki oleh

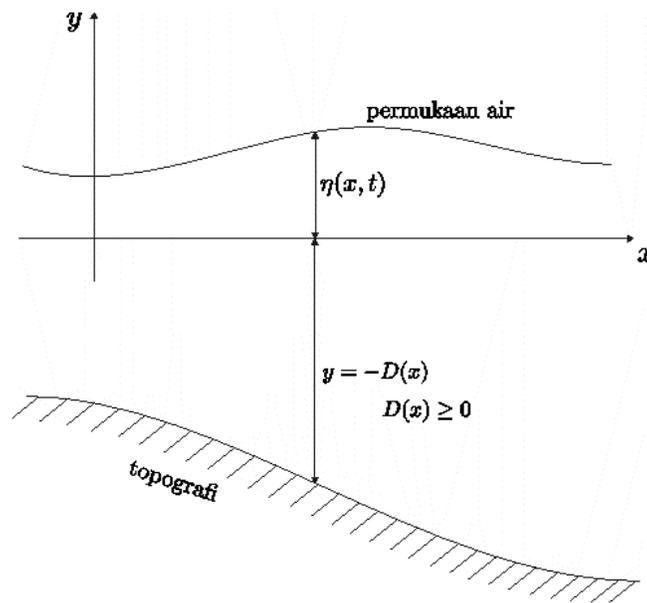
gelombang sederhana, pertidaksamaan entropi, dan gelombang shock. Akhirnya, makalah ini ditutup dengan bagian KESIMPULAN.

**SISTEM PERSAMAAN AIR DANGKAL**

Aliran air dangkal dapat dijelaskan secara matematis oleh sistem persamaan air dangkal (SPAD). Dalam satu dimensi, sistem ini terdiri atas satu persamaan massa dan satu persamaan momentum yang diberikan secara berturut-turut oleh

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + [u(D + \eta)]_x &= 0, \\ u_t + uu_x &= -g\eta_x. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Seperti tampak dalam Gambar 1,  $x$  adalah peubah jarak horizontal untuk ruang (spatial) berdimensi satu,  $t$  adalah peubah waktu (temporal),  $\eta(x,t)$  mewakili jarak vertikal dari sumbu acuan horizontal hingga permukaan air di titik  $x$  pada waktu  $t$ ,  $D(x)$  mewakili jarak vertikal dari sumbu acuan horizontal hingga permukaan topografi dasar air. Di sini,  $u(x,t)$  merepresentasikan kecepatan aliran di titik  $x$  pada waktu  $t$ , dan  $g$  adalah konstanta yang melambangkan percepatan gravitasi.



Gambar 1: Aliran air dangkal satu dimensi.

Dalam sistem (1),  $\eta$  adalah elevasi permukaan yang bernilai positif jika permukaan air naik di atas permukaan air ekuilibrium, sedangkan  $D$  adalah fungsi kedalaman yang bernilai positif jika topografi berada di bawah permukaan air ekuilibrium. Penurunan sistem (1) dapat diperoleh dalam beberapa referensi, misalnya buku karangan Stoker (1957).

Dalam beberapa referensi, seperti yang dikarang oleh LeVeque (2002), SPAD yang dinyatakan dalam sistem (1) sering kali ditulis dalam bentuk

$$\left. \begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x &= -ghz_x. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dengan  $z = -D$  dan  $h = \eta - z$ . Dengan demikian, diperoleh teorema berikut.

**Teorema 1.**

SPAD (1) ekuivalen dengan SPAD (2).

Bukti:

Substitusi  $D = -z$  dan  $\eta = h + z$  ke dalam persamaan pertama dari SPAD (1) diperoleh

$$(h + z)_t + (uh)_x = 0. \quad (3)$$

Karena  $z_t = 0$ , persamaan (3) menjadi

$$(h)_t + (uh)_x = 0. \quad (4)$$

Selanjutnya, substitusi  $\eta = h + z$  ke dalam persamaan kedua dari SPAD (1) dan hasilnya diekspansikan, diperoleh

$$hu_t + huu_x + ghh_x = -ghz_x. \quad (5)$$

Dengan menerapkan persamaan (4), persamaan (5) dapat ditulis menjadi

$$[h_t u] + hu_t + [(hu)_x u] + huu_x + ghh_x = -ghz_x, \quad (6)$$

yang kemudian dapat disederhanakan menjadi

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghz_x. \quad (7)$$

Jadi, SPAD (1) berakibat SPAD (2).

Dengan cara yang analog, SPAD (2) berakibat SPAD (1). Oleh karena itu, SPAD (1) ekuivalen dengan SPAD (2).

**SPAD SEBAGAI SISTEM HIPERBOLIK**

Dalam bagian ini dibahas bahwa SPAD memiliki sifat hiperbolik, sebagaimana dinyatakan oleh LeVeque (2002). Untuk mengawali pemaparan, disajikan definisi sifat hiperbolik untuk sistem linear.

**Definisi 2.**

Suatu sistem linear berbentuk

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}\mathbf{q}_x = \mathbf{0}, \tag{8}$$

dengan  $\mathbf{q}$  adalah vektor kuantitas berkomponen sebanyak  $m$  dan  $\mathbf{A}$  matriks koefisien konstan berukuran  $m \times m$ , disebut hiperbolik jika  $\mathbf{A}$  dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen-nilai eigen yang real.

Terdapat beberapa jenis khusus sistem hiperbolik berdasarkan sifat matriks  $\mathbf{A}$ . Jika  $\mathbf{A}$  adalah suatu matriks simetri, maka  $\mathbf{A}$  dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen-nilai eigen real dan sistemnya disebut hiperbolik simetris. Jika  $\mathbf{A}$  mempunyai nilai eigen-nilai eigen real yang semuanya berbeda, maka  $\mathbf{A}$  dapat didiagonalisasi dan sistemnya disebut hiperbolik tegas. Jika  $\mathbf{A}$  mempunyai nilai eigen-nilai eigen real tetapi tidak dapat didiagonalisasi, maka sistemnya disebut hiperbolik lemah.

Terdapat pula bentuk-bentuk lain dari sistem hiperbolik. Suatu sistem linear dengan koefisien peubah yang berbentuk

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}(x)\mathbf{q}_x = \mathbf{0}, \tag{9}$$

adalah hiperbolik di titik  $x$  dengan matriks koefisien  $\mathbf{A}(x)$  memenuhi kondisi hiperbolik yang dinyatakan dalam Definisi 2. Jika sumber  $\mathbf{S}(x)$  muncul di dalam sistem dan tertulis sebagai

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}(x)\mathbf{q}_x = \mathbf{S}(x), \tag{10}$$

sifat hiperbolik masih bergantung pada matriks koefisien, yang berarti bahwa sistem (10) dinyatakan hiperbolik di setiap titik  $x$  di mana  $\mathbf{A}(x)$  dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen-nilai eigen real.

Suatu sistem quasilinear

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}(\mathbf{q}, x, t)\mathbf{q}_x = \mathbf{S}(x), \tag{11}$$

dikatakan hiperbolik di titik  $(\mathbf{q}, x, t)$  jika matriks koefisien  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, x, t)$  memenuhi kondisi hiperbolik yang dinyatakan dalam Definisi 2. Dengan demikian, hukum kekekalan nonlinear

$$\mathbf{q}_t(x, t) + [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x, t))]_x = \mathbf{S}(x), \quad (12)$$

yang juga dapat ditulis dalam bentuk quasilinear

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}'(\mathbf{q}) \mathbf{q}_x = \mathbf{S}(x), \quad (13)$$

adalah hiperbolik jika matriks Jacobian  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  memenuhi kondisi hiperbolik untuk setiap nilai kuantitas  $\mathbf{q}$  yang relevan. Dengan pengertian ini, diperoleh teorema berikut.

**Teorema 3.**

SPAD adalah suatu sistem hiperbolik tegas.

Bukti:

Dipandang SPAD (2). Sistem ini dapat dinyatakan ke dalam bentuk (13), dengan

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ (q_2)^2 / q_1 + \frac{1}{2}g(q_1)^2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

dan

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghz_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gq_1z_x \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Matriks Jacobian  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  adalah

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Matriks Jacobian tersebut mempunyai nilaieigen-nilaieigen

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh} \quad (18)$$

yang secara berturut-turut terkait dengan vektoreigen-vektoreigen

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Jelas bahwa kedua nilai eigen tersebut berbeda dan bernilai real jika  $h$  positif, dan matriks Jacobian  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  dapat didiagonalisasi dengan nilai eigen-nilai eigen tersebut. Hal ini membuktikan bahwa SPAD bersifat hiperbolik tegas pada saat  $h$  positif. ■

### SIFAT-SIFAT SPAD

Stoker (1957) menjelaskan karakteristik SPAD. Dalam bagian ini, karakteristik dalam kaitannya dengan gelombang sederhana dipaparkan, dan lebih lanjut, sebuah catatan kondisi entropi serta kondisi gelombang shock juga dipaparkan. Pemaparan tentang gelombang sederhana dan gelombang shock mengikuti kajian yang dilakukan oleh Stoker (1957), sedangkan pemaparan tentang kondisi entropi mengikuti kajian yang diberikan oleh Bouchut (2004).

Dari bentuk SPAD, terdapat dua himpunan kurva karakteristik,  $C_1$  dan  $C_2$ , yang merupakan kurva-kurva penyelesaian persamaan diferensial biasa

$$\left. \begin{aligned} C_1 : \frac{dx}{dt} = u + c, \\ C_2 : \frac{dx}{dt} = u - c, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

dengan  $c = \sqrt{gh}$  adalah nilai kecepatan perambatan gelombang relatif terhadap kecepatan partikel  $u$ . Fungsi-fungsi  $u + c$  dan  $u - c$  adalah nilai eigen-nilai eigen dari matriks koefisien SPAD. Secara simultan berlaku relasi yang disebut Riemann invarian, yaitu

$$\left. \begin{aligned} u + 2c = k_1 \text{ di sepanjang kurva } C_1, \\ u - 2c = k_2 \text{ di sepanjang kurva } C_2, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

dengan  $k_1$  dan  $k_2$  masing-masing bernilai konstan. Nilai  $k_1$  dan  $k_2$  berbeda pada kurva yang berbeda dan kedua himpunan karakteristik yang dinyatakan dalam (20) juga berbeda karena  $c \neq 0$  untuk  $h \neq 0$ . Perlu ditekankan bahwa sistem persamaan (20) bersama-sama dengan (21) adalah ekuivalen dengan SPAD.

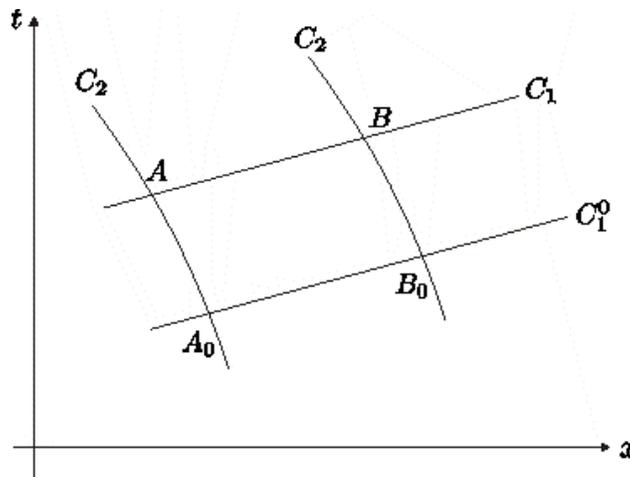
**Makna gelombang sederhana**

Misalkan bahwa air dalam keadaan awal bersifat seragam, artinya, pada saat  $t = 0$  kecepatan partikel  $u$  dan kecepatan perambatan gelombang  $c$  adalah  $u = u_0$  dan  $c = c_0$  masing-masing bernilai konstan. Misalkan pula bahwa suatu usikan timbul di titik asal  $x = 0$  sehingga salah satu dari  $u$  atau  $c$  berubah nilainya terhadap waktu. Sebagai gelombang sederhana, usikan di suatu titik permukaan air akan merambat di dalam air yang berkedalaman konstan dan berkecepatan seragam. Dengan kondisi ini, dapat dibuktikan bahwa salah satu dari himpunan karakteristik yang dinyatakan dalam (20) merupakan himpunan yang seluruhnya berisi garis lurus di mana masing-masing  $u$  atau  $c$  bernilai konstan. Gerakan perambatan dengan kondisi inilah yang disebut dengan gelombang sederhana. Untuk lebih jelasnya secara matematis, pernyataan ini dapat dituangkan dalam teorema berikut.

**Teorema 4.**

Gelombang sederhana mengakibatkan salah satu dari dua himpunan karakteristik yang diberikan oleh persamaan diferensial biasa (20) merupakan himpunan yang seluruhnya berisi garis lurus di mana masing-masing  $u$  atau  $c$  bernilai konstan.

Bukti:



Gambar 2: Suatu daerah dalam bidang-  $x, t$  yang memuat karakteristik garis lurus.

Pertama-tama dipandang bahwa jika nilai  $u$  dan  $c$  pada kurva karakteristik, katakan suatu kurva penyelesaian  $C_1^0$  dari persamaan pertama sistem (20), masing-masing bernilai konstan. Akibatnya,  $C_1^0$  adalah suatu garis lurus di mana nilai  $u$  dan  $c$  masing-masing bernilai konstan. Ini terjadi paling tidak dalam suatu daerah dalam bidang- $x, t$  di mana  $u(x, t)$  dan  $c(x, t)$  tidak memuat singularitas yang dilingkupi oleh kedua himpunan karakteristik yang berbeda. Jelas bahwa kurva  $C_1^0$  adalah suatu garis lurus jika  $u$  dan  $c$  masing-masing bernilai konstan di sepanjang kurva tersebut, karena gradien kurva adalah konstan berdasarkan sistem (20). Selanjutnya, misalkan  $C_1$  adalah suatu karakteristik yang lain yang berdekatan dengan  $C_1^0$ . Kemudian dipandang dua titik sebarang  $A_0$  dan  $B_0$  pada  $C_1^0$  bersama-sama dengan karakteristik dari himpunan  $C_2$  melalui  $A_0$  dan  $B_0$ , dan misalkan bahwa karakteristik  $C_2$  memotong  $C_1$  di titik  $A$  dan  $B$  seperti tampak pada Gambar 2. Bukti pernyataan dalam teorema cukup dengan menunjukkan bahwa jika  $u(A) = u(B)$  dan  $c(A) = c(B)$  maka  $u$  dan  $c$  bernilai konstan pada  $C_1$  (hal ini terjadi karena titik  $A$  dan  $B$  adalah dua titik berbeda yang sebarang pada  $C_1$ ) dan akibatnya gradien kurva  $C_1$  juga bernilai konstan.

Karena  $u(A_0) = u(B_0)$  dan  $c(A_0) = c(B_0)$ , dengan menggunakan relasi kedua dari (21), diperoleh bahwa

$$\left. \begin{aligned} u_A - 2c_A &= u_{A_0} - 2c_{A_0} , \\ u_B - 2c_B &= u_{B_0} - 2c_{B_0} = u_{A_0} - 2c_{A_0} , \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

yang memberikan relasi

$$u_A - 2c_A = u_B - 2c_B . \quad (23)$$

Sedangkan menggunakan relasi pertama dari (21) untuk  $C_1$ , didapatkan relasi

$$u_A + 2c_A = u_B + 2c_B . \quad (24)$$

Relasi (23) dan (24) secara bersama-sama hanya dapat dipenuhi jika  $u(A) = u(B)$  dan  $c(A) = c(B)$ . Dengan demikian, teorema terbukti. ■

### Kondisi shock

Dengan menyatakan SPAD ke dalam bentuk quasilinear dan menganggap bahwa penyelesaian SPAD bersifat halus, telah dipaparkan di muka bahwa terdapat dua himpunan karakteristik yang membentuk suatu sistem koordinat curvilinear atas bidang- $x, t$ . Akan tetapi, hal ini tidak selalu bisa terjadi karena penyelesaian SPAD kadang kala tidak bersifat halus untuk kasus tertentu.

Secara teori, pada saat dua atau lebih karakteristik dari himpunan yang sama saling berpotongan, suatu diskontinuitas yang disebut dengan *shock* akan muncul. Dalam kasus tersebut, untuk menyelidiki penyelesaian SPAD, bentuk integral dari hukum kekekalan harus diterapkan. Penyelesaian bentuk integral terkait disebut penyelesaian lemah dari SPAD. Diberikan  $\dot{\xi}$  adalah kecepatan perambatan shock, maka pada posisi shock, kondisi Rankine-Hugoniot

$$\dot{\xi}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l) \quad (25)$$

harus terpenuhi. Namun demikian, kondisi Rankine-Hugoniot tidak menjamin ketunggalan penyelesaian. Untuk memastikan apakah suatu penyelesaian lemah adalah benar-benar penyelesaian yang benar secara fisis diperlukan penerapan kondisi entropi Lax.

### Catatan 5.

SPAD memenuhi pertidaksamaan entropi terkait dengan energi fisis. Pertidaksamaan entropi menurut Bouchut (2004) diberikan oleh

$$\tilde{\eta}_t(\mathbf{q}, z) + \tilde{G}_x(\mathbf{q}, z) \leq 0,$$

dengan

$$\tilde{\eta}_t(\mathbf{q}, z) = \eta(\mathbf{q}) + ghz, \quad \tilde{G}_x(\mathbf{q}, z) = G(\mathbf{q}) + ghzu,$$

dan

$$\eta(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}hu^2 + \frac{g}{2}h^2, \quad G(\mathbf{q}) = (\frac{1}{2}hu^2 + gh^2)u.$$

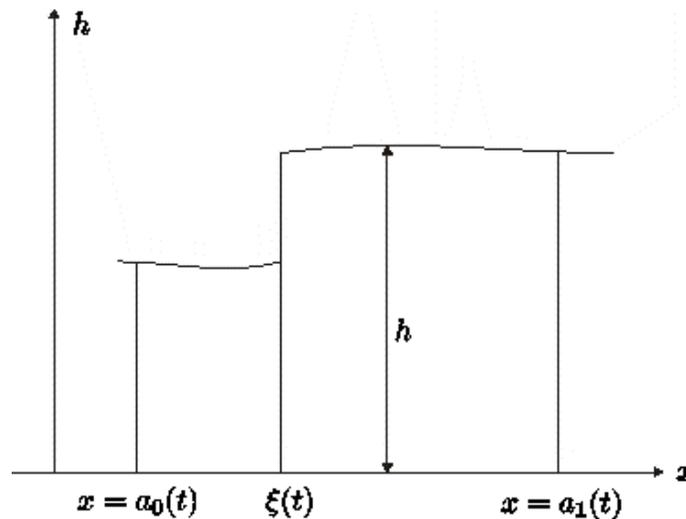


Kondisi entropi Lax terpenuhi jika karakteristik-karakteristik yang ada konvergen sedemikian sehingga

$$\lambda_1(\mathbf{q}_l) > \dot{\xi} > \lambda_1(\mathbf{q}_r) \quad \text{dan} \quad \lambda_2(\mathbf{q}_l) > \dot{\xi} > \lambda_2(\mathbf{q}_r) \quad (26)$$

untuk shock-1 dan shock-2 secara berturut-turut. Perlu diingat bahwa dari persamaan (18),  $\lambda_1 = u - \sqrt{gh}$  dan  $\lambda_2 = u + \sqrt{gh}$  adalah nilai-eigen-nilai-eigen dari matriks Jacobian  $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$  yang juga merupakan kecepatan perambatan gelombang atau disebut kecepatan karakteristik.

Dalam praktek, gelombang shock dihasilkan oleh diskontinuitas dari nilai kuantitas (kedalaman, kecepatan, ataupun tekanan). Misal diberikan bahwa terdapat diskontinuitas permukaan air di titik  $x = \xi(t)$  di antara  $x = a_0(t)$  dan  $x = a_1(t)$  dengan  $a_1 > a_0$  seperti tampak pada Gambar 3.



Gambar 3: Suatu keadaan diskontinuitas.

Penerapan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum terhadap kolom air terkait menghasilkan relasi

$$\frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \rho h \, dx = 0 \quad (27)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \rho h u \, dx = \int_{z_0}^{w_0} p_0 \, dy - \int_{z_1}^{w_1} p_1 \, dy = \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \quad (28)$$

dengan rumusan tekanan air hidrostatik adalah  $p = \rho gh$ , dan di sini  $w_0 = z_0 + h_0$  dan  $w_1 = z_1 + h_1$ . Persamaan (27) menyatakan bahwa massa air di dalam kolom tetap bernilai konstan, sedangkan persamaan (28) menyatakan bahwa perubahan momentum dalam kolom air sama dengan resultan dari gaya-gaya yang bekerja di ujung-ujung kolom.

Relasi tersebut melibatkan integral yang mempunyai bentuk umum

$$I = \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \psi(x, t) dx \quad (29)$$

dengan  $\psi(x, t)$  diskontinu di titik  $x = \xi(t)$ . Penerapan aturan Leibniz untuk menurunkan bentuk integral (29) menghasilkan relasi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{\xi(t)} \psi dx + \frac{d}{dt} \int_{\xi(t)}^{a_1(t)} \psi dx \\ &= \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx + \psi(\xi_-, t) \dot{\xi}(t) - \psi(a_0(t), t) u_0 + \psi(a_1(t), t) u_1 - \psi(\xi_+, t) \dot{\xi}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Di sini,  $u_0 = \dot{a}_0(t) = \frac{d}{dt} a_0(t)$  dan  $u_1 = \dot{a}_1(t) = \frac{d}{dt} a_1(t)$  adalah kecepatan di ujung kiri dan ujung kanan kolom,  $\dot{\xi}$  adalah kecepatan gerakan diskontinuitas, serta  $\psi(\xi_-, t)$  dan  $\psi(\xi_+, t)$  adalah nilai limit untuk  $\psi$  di kiri dan kanan  $x = \xi$ . Dengan mengambil limit sedemikian sehingga lebar kolom mendekati nol dan posisi diskontinuitas tetap berada di dalam kolom, suku integral pada ruas kanan dari persamaan (30) mendekati nol. Dengan demikian, diperoleh

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{dI}{dt} = \psi_1 v_1 - \psi_0 v_0. \quad (31)$$

Di sini,  $l = a_1 - a_0$  adalah lebar kolom, serta  $v_0 = u_0 - \dot{\xi}$  dan  $v_1 = u_1 - \dot{\xi}$  adalah kecepatan aliran di ujung kiri dan kanan kolom relatif terhadap gerakan diskontinuitas. Lebih lanjut,  $\psi_0$  dan  $\psi_1$  mewakili nilai limit untuk  $\psi$  di kiri dan di kanan titik diskontinuitas.

Berdasarkan pemaparan di muka, berdasarkan (27), (28), dan (31) diperoleh

$$\rho h_1 v_1 - \rho h_0 v_0 = 0 \quad (32)$$

dan

$$\rho h_1 v_1 u_1 - \rho h_0 v_0 u_0 = \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2. \quad (33)$$

Persamaan (32) dan (33) dapat ditulis ulang menjadi

$$\bar{\rho}_1 v_1 = \bar{\rho}_0 v_0 \tag{34}$$

dan

$$\bar{\rho}_1 v_1 u_1 - \bar{\rho}_0 v_0 u_0 = \bar{p}_0 - \bar{p}_1 \tag{35}$$

dengan  $\bar{\rho} = \rho h$  dan  $\bar{p} = \frac{1}{2} \rho g h^2 = \frac{g}{2\rho} \bar{\rho}^2$ . Suatu diskontinuitas yang memenuhi (34) dan (35) disebut gelombang shock atau cukup disebut shock atau bore, atau jika diskontinuitas-nya stasioner disebut lompatan hidrolik.

Cara lain menyatakan kondisi shock (34) dan (35) adalah

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_1 v_1 = \bar{\rho}_0 v_0 = m, \\ m(v_1 - v_0) = \bar{p}_0 - \bar{p}_1, \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

dengan  $m$  mewakili flux massa yang melintasi titik shock.

Dipandang kasus khusus  $u_0 = 0$  yang berarti bahwa air di sebelah kiri shock dalam keadaan diam. Karena  $m v_1 = \bar{\rho}_0 v_0 v_1$  dan  $m v_0 = \bar{\rho}_1 v_1 v_0$ , persamaan kedua dari kondisi shock sistem (36) dapat ditulis

$$v_1 v_0 = \frac{\bar{p}_0 - \bar{p}_1}{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1}. \tag{37}$$

Karena  $u_0 = 0$ , diperoleh  $v_0 = -\dot{\xi}$  dan  $v_1 = u_1 - \dot{\xi}$ ; sehingga menggunakan relasi  $\bar{p} = \frac{g}{2\rho} \bar{\rho}^2$  dan  $\rho = \rho_0 = \rho_1$ , persamaan (37) dapat ditulis ulang menjadi

$$-\dot{\xi}(u_1 - \dot{\xi}) = \frac{g}{2\rho} (\bar{\rho}_0 + \bar{\rho}_1). \tag{38}$$

Dengan alasan yang sama, karena  $u_0 = 0$ , persamaan pertama dari kondisi shock sistem (36) menghasilkan

$$\bar{\rho}_1 (u_1 - \dot{\xi}) = -\bar{\rho}_0 \dot{\xi}. \tag{39}$$

Lebih lanjut, jika  $u_1$  dieliminasi, kondisi kedua untuk shock yang dinyatakan oleh (38) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\xi}^2 = \frac{g\bar{\rho}_1}{2\rho} \left( 1 + \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_0} \right); \tag{40}$$

atau jika  $\bar{\rho}_0$  dieliminasi, persamaan (38) dapat dinyatakan sebagai

$$-\dot{\xi}(u_1 - \dot{\xi}) = \frac{g\bar{\rho}_1}{2\rho} \left( 1 - \frac{u_1 - \dot{\xi}}{\dot{\xi}} \right). \quad (41)$$

Secara singkat, persamaan (39) bersama-sama dengan salah satu dari (38), (40), atau (41) adalah kondisi shock untuk kasus  $u_0 = 0$ .

## SIMPULAN

Makalah ini telah memaparkan suatu kajian analitis sistem persamaan air dangkal. Penulis berharap bahwa makalah ini dapat digunakan sebagai bahan referensi yang sekiranya bermanfaat untuk tujuan pedagogi dalam bidang matematika terapan pada mekanika fluida. Untuk melengkapi pembahasan makalah ini, penelitian selanjutnya akan mengkaji sistem persamaan air dangkal secara numeris.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bouchut, F. 2004. *Nonlinear Stability Of Finite Volume Methods For Hyperbolic Conservation Laws And Well-Balanced Schemes For Sources*. Basel: Birkhauser Verlag.
- Chanson, H. 2006. *Analytical solutions of laminar and turbulent dam break wave, River Flow*. London: Taylor & Francis Group.
- Jakeman, J. 2006. *On Numerical Solutions of the Shallow Water Wave Equations*. Honours Thesis yang tidak diterbitkan. Canberra: The Australian National University.
- LeVeque, R. J. 2002. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ritter, A. 1892. Die fortpflanzung der wasserwellen. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 36 (33): 947–954.
- Saint-Venant, A. J. C. de. 1871. Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 73:147–154.
- Stoker, J. J. 1957. *Water Waves: The Mathematical Theory with Application*. New York: Interscience Publishers.

- Wang, X., Cao, Z., Pender, G., & Neelz, S. 2010. Numerical modelling of flood flows over irregular topography. *Proceedings of the ICE - Water Management*, 163(5):255–265.
- Ying, L., Sumida, S., Ceric, M., Yamamoto, K., & Watanabe, M. 2008. Numerical Study of Effects of Tsunami Wave Generated on Nankai Trough. *Journal of the Faculty of Environmental Science and Technology, Okayama University*, 13(1): 57–62.