PYTHAGORAS Vol. 5, No. 1, Juni 2009: 54-60

BIFURKASI HOPF DALAM MODEL EPIDEMI DENGAN WAKTU TUNDAAN DISKRET

Rubono Setiawan
Mahasiswa S–2 Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada
Email : rubono_4869@yahoo.co.id

Abstrak

Di dalam suatu model epidemi dengan waktu tundaan diskrit, jika berubahnya waktu tundaan dapat mengakibatkan perubahan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium penyakitnya, maka dikatakan terjadi bifurkasi Hopf di titik ekuilibrium penyakit tersebut. Secara umum bifurkasi membicarakan tentang perubahan struktur orbit dari suatu sistem persamaan diferensial seiring dengan perubahan nilai parameternya. Didalam analisa kestabilan titik ekuilibrium model epidemi dengan waktu tundaan diskrit , waktu tundaan dianggap sebagai parameter bifurkasi. Kemudian bifurkasi yang berkaitan dengan adanya nilai eigen kompleks murni disebut bifurkasi Hopf (Andronov – Hopf).

Kata kunci : bifurkasi Hopf , waktu tundaan , nilai eigen kompleks murni.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Teori bifurkasi merupakan teori yang membicarakan tentang perubahan struktur orbit dari sistem persamaan diferensial seiring dengan perubahan nilai parameternya. Di dalam model matematika (epidemi), bifurkasi untuk model epidemi dapat dilengkapi dengan adanya waktu tundaan. Waktu tundaan dapat dipandang sebagai parameter bifurkasi, hal ini dapat dilihat dalam jurnal-jurnal yang membahas tentang model epidemi dengan waktu tundaan. Hal ini dimungkinkan karena adanya waktu tundaan, perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium penyakit, sehingga apabila hal tersebut terjadi maka dapat dikatakan bahwa model epidemi tersebut mengalami bifurkasi di titik ekuilibrium penyakit ketika suatu nilai waktu tundaan tertentu, yang nantinya nilai waktu tundaan tersebut disebut nilai kritis tundaan. Lebih khusus bifurkasi tersebut merupakan bifurkasi Hopf.

Rumusan Masalah

Di dalam artikel ini akan dibahas mengenai bifurkasi Hopf , yang akan dibahas pada bab pembahasan bagian 1. Selanjutnya khusus mengenai Bifurkasi Hopf didalam model epidemi dengan tundaan akan dibahas pada bab pembahasan bagian 2.

Tujuan dan Manfaat

Tujuan penulisan artikel ini adalah untuk mengatahui gambaran umum tentang bifurkasi Hopf. Kemudian dapat diterapkan penggunaannya di dalam analisa kestabilan suatu model epidemi dengan waktu tundaan.

PEMBAHASAN

Bifurkasi Hopf dalam Sistem Dinamik Kontinu

Teori bifurkasi membicarakan tentang perubahan struktur orbit dari sistem persamaan diferensial / dinamik kontinu seiring dengan perubahan nilai parameter. Diberikan sistem dinamik kontinu yang autonom berikut :

$$\dot{x} = f(x,\mu)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}^1 \qquad (1.1)$$

dengan f adalah fungsi *smoothing* yang berkaitan dengan x dan α. Misalkan $x = x^*$ adalah titik ekuilibrium hiperbolik dari sistem tersebut untuk $\mu = \mu^*$. Lebih lanjut dapat mengganti nilai dari parameter dan mengamati perubahan dari ekuilibrium.

Secara umum hanya terdapat dua hal yang dapat menyebabkan perubahan sifat hiperbolik dari ekuilibrium menjadi tidak hiperbolik, yaitu adanya nilai eigen real yang menuju nol dan didapat $\lambda_1 = 0$ atau nilai eigen kompleks yang menuju garis imaginer sehingga akan didapat nilai eigen kompleks dengan bagian real nol yaitu $\lambda_{1,2} = \pm i\omega^*$, $\omega^* > 0$, kedua hal ini terjadi untuk suatu nilai tertentu dari parameter. Bila terjadi hal tersebut maka akan terjadi perubahan struktur dari ekuilibrium menjadi tidak stabil dan ekuilibrium akan mengalami bifurkasi di nilai parameter tersebut . Sehingga kita dapat memberikan definisi – definisi berikut.

Definisi 1.1. Nilai Bifurkasi (Verhulst, 1990)

(i) Nilai parameter $\mu = \mu^*$ disebut nilai bifurkasi jika terdapat solusi nontrivial pada sistem $(2.1.1)$ yang terdefinisi didalam persekitaran $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

(ii) Titik (x^*, μ^*) dengan $f(x^*, \mu^*) = 0$ disebut titik bifurkasi jika pada titik (x^*, μ^*) terjadi perubahan struktur orbitnya.

Definisi 1.2. Bifurkasi Hopf (Kuznetsov, 1998)

Bifurkasi yang terjadi berkaitan dengan adanya nilai eigen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega^*,\ \omega^* > 0$ disebut bifurkasi Hopf (Andronov – Hopf).

Sehingga bifurkasi Hopf membahas matriks Jacobian yang berkaitan dengan linearisasi dari sistem (1.1) yang mempunyai sepasang nilai eigen imaginer murni dan nilai eigen lainnya mempunyai bagian real yang tidak sama dengan nol yang selanjutnya dipelajari struktur orbit disekitar x^* yang berubah sebagai akibat perubahan nilai parameter μ. Untuk bifurkasi Hopf diperlukan $n \geq 2$, atau dengan kata lain bifurkasi Hopf dapat terjadi pada sistem (berparameter) yang berdimensi 2 atau lebih.

Kemudian akan diberikan gambaran tentang terjadinya Bifurkasi Hopf pada suatu sistem dinamik kontinu. Perhatikan kembali sistem (1.1), misalkan $x^* = 0$ adalah titik ekuilibrium sistem(1.1) ketika $\mu = 0$ dengan nilai eigen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega^*,\ \omega^* > 0$. Dengan teorema fungsi implisit maka dapat ditunjukkan bahwa sistem tersebut mempunyai titik ekuilibrium tunggal $x^*(\mu)$ dalam suatu persekitaran dari titik asal untuk semua nilai $|\mu|$ yang cukup kecil. Kemudian dapat melakukan pergeseran koordinat dan menempatkan titik ekuilibrium ini di titik asal, sehingga tanpa mengurangi keumuman bahwa $x^* = 0$ adalah titik ekuilibrium dari sistem (1.1) untuk nilai $|\mu|$ yang cukup kecil. Dengan linearisasi didapat sistem linearisasi sebagai berikut :

$$\dot{x} = A(\mu)x \tag{1.2}$$

Matriks jacobian $A(\mu)$ dapat ditulis sebagai :

$$A(\mu)=\begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

dengan $a(\mu), b(\mu), c(\mu)$ dan $d(\mu)$ adalah fungsi licin dalam μ. Kemudian nilai eigen dari matriks $A(\mu)$ didapat dari persamaan karakteristik :

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{1.4}$$

dengan $p = p(\mu) = a(\mu) + b(\mu) = traceA(\mu)$ dan

$$q = q(\mu) = a(\mu)d(\mu) - b(\mu)c(\mu) = \det\ A(\mu)$$

Agar terjadi bifurkasi Hopf, haruslah : $p(0)=0$ dan det $q(0)=\omega^{*2}>0$

Untuk nilai $|\alpha|$ yang cukup kecil dapat dibentuk :

$$\phi(\mu)=\frac{1}{2}p(\mu),\ \omega(\mu)=\frac{1}{2}\sqrt{4q(\mu)-p^2(\mu)}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1(\mu)=\lambda(\mu)\ ,\ \lambda_2(\mu)=\overline{\lambda(\mu)}$$

dengan

$$\lambda(\mu)=\phi(\mu)+i\omega(\mu)\ ,\quad \mu(0)=0\ ,\ \omega(0)=\omega^*>0$$

Bifurkasi Hopf dalam Model Epidemi dengan Tundaan Diskrit

Di dalam model epidemi sebagai contoh model S I R, kita dapat memasukkan waktu inkubasi penyakit sebagai waktu tundaan diskrit (Cappaso, 1993) ke dalam model tersebut. Sehingga akan didapat model berbentuk sistem persamaan diferensial tundaan (PDT). Kemudian waktu tundaan τ dapat dipandang sebagai parameter bifurkasi.

Misalkan diberikan sistem PDT sebagai berikut :

$$\dot{x}(t)=f\left(x(t),x(t-\tau)\right) \tag{2.1}$$

maka persamaan karateristik dari sistem (2.1) di suatu titik ekuilibrium adalah :

$$\Delta(\lambda,\tau)\equiv P_1(\lambda)+P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau}=0 \tag{2.2}$$

dengan τ adalah lama waktu tundaan (diskret) yang ditambahkan pada model persamaan diferensial yang bersangkutan, dengan $P(\lambda)$ dan $Q(\lambda)$ berupa polinomial dalam λ, sehingga persamaan (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$\Delta(\lambda,\tau)=\sum_{j=0}^{N} a_j\lambda_j + e^{-\lambda\tau}\sum_{j=0}^{M} b_j\lambda_j \tag{2.3}$$

Ketika waktu tundaannya ada atau $\tau \neq 0$, misalkan akar karakteristik dari persamaan (2.2) adalah $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$ dan diasumsikan $\omega > 0$, maka persamaan (2.2) akan menjadi :

$$P_1(i\omega)+P_2(i\omega)e^{-i\omega\tau}=0 \tag{2.4}$$

Bila bagian real dan imaginer dari persamaan (2.4) dipecah dan suku eksponensial ditulis dalam bentuk trigonometri maka akan didapat persamaan :

$$R_1(\omega)+iQ_1(\omega)+\left(R_2(\omega)+iQ_2(\omega)\right)\left(\cos(\omega\tau)-i\sin(\omega\tau)\right)=0 \tag{2.5}$$

dengan :

$$R_1(\omega)=\sum_j(-1)^{j+1}a_{2j}\omega^{2j}\ ;\ Q_1(\omega)=\sum_j(-1)^j a_{2j+1}\omega^{2j+1} \quad \text{dan}$$

$$R_2(\omega)=\sum_j(-1)^{j+1}b_{2j}\omega^{2j}\ ;\ Q_2(\omega)=\sum_j(-1)^j b_{2j+1}\omega^{2j+1}$$

Kemudian agar persamaan (2.5) berlaku, maka jumlah bagian real dan bagian imaginer dari persamaan (2.5) haruslah sama dengan nol, sehingga akan didapat persamaan :

$$\begin{aligned} R_1(\omega)+R_2(\omega)\cos(\omega\tau)+Q_2(\omega)\sin(\omega\tau)&=0\\ Q_1(\omega)-R_2(\omega)\sin(\omega\tau)+Q_2(\omega)\cos(\omega\tau)&=0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dengan mengkuadratkan kedua persamaan (2.6) kemudian menjumlahkan hasilnya maka akan didapat :

$$R_1(\omega)^2+Q_1(\omega)^2=R_2(\omega)^2+Q_2(\omega)^2 \tag{2.7}$$

Jika terdapat akar real positif yang merupakan solusi dari (2.7) maka akan terdapat suatu nilai τ yang berkaitan dengan suatu $\omega^* = \pm\sqrt{\mu^*}$ yang merupakan solusi persamaan (2.6). Bila ω^* ditemukan maka dengan mudah dapat ditemukan suatu nilai terkecil $\tau=\tau^*$ yang memenuhi persamaan (2.6). Lebih lanjut $\tau=\tau^*$ disebut nilai kritis tundaan.

Selanjutnya jika ditemukan nilai kritis tundaan τ^* sehingga terdapat nilai eigen yang berada pada garis imaginer $\lambda = \pm i\omega^*$, $\omega^* > 0$, selanjutnya jika dipenuhi kondisi transversal yaitu $sign\left\{ \frac{d\,\mathrm{Re}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda = i\omega^*, \tau = \tau^*} \right\} > 0$ (Kuang, 1993), maka akan terjadi perubahan sifat kestabilan dari titik ekuilibrium penyakit karena berubahnya nilai waktu tundaan sebagai parameter bifurkasi. Titik ekuilibrium penyakit akan tetap stabil untuk $\tau < \tau^*$ dan menjadi tidak stabil ketika $\tau > \tau^*$.

Bila kondisi tersebut dipenuhi artinya akan terjadi perubahan struktur orbit disekitar titik ekuilibrium ketika $\tau = \tau^*$, sehingga sistem tersebut mengalami bifurkasi di titik ekuilibrium ketika $\tau = \tau^*$. Lebih lanjut karena bifurkasi terjadi terkait adanya nilai eigen pada garis imaginer / nilai eigen kompleks murni, maka bifurkasinya adalah bifurkasi Hopf.

Tetapi perlu diiingat bahwa tidak semua model epidemi dengan waktu tundaan diskret dapat terjadi bifurkasi Hopf di titik ekuilibrium penyakitnya. Sebagai contoh model SIR untuk populasi konstan (*Vital Dynamics*) yang dilengkapi dengan waktu tundaan diskret merupakan contoh model epidemi yang tidak akan mengalami bifurkasi Hopf di titik ekuilibriumnya karena pada model ini berubahnya waktu tundaan tidak akan menyebabkan perubahan kestabilan pada titik ekuilibrium penyakitnya.

SIMPULAN

Dengan mengganggap waktu tundaan τ sebagai parameter bifurkasi maka didapatkan bifurkasi Hopf dalam model epidemi dengan waktu tundaan yang berbentuk sistem PDT. Bifurkasi Hopf terjadi di titik ekuilibrium penyakit ketika nilai waktu tundaan τ sama dengan suatu nilai kritis tundaan τ^*. Hal ini dapat terjadi jika berubahnya nilai τ dapat menyebabkan perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium penyakitnya sehingga dapat ditemukan suatu nilai τ^* dan dipenuhinya kondisi transversal. Apabila nilai τ^* tersebut ditemukan maka (x^*, τ^*) disebut titik bifurkasi karena pada titik tersebutlah terjadi perubahan struktur orbit dari sistem PDT sehingga berakibat titik ekuilibrium penyakit yang awalnya stabil ketika $\tau < \tau^*$ menjadi tidak stabil ketika $\tau > \tau^*$.

DAFTAR PUSTAKA

Cappaso,V. 1993. Mathematical Structures of Epidemic Systems. *Vol 97 Lecture- Notes in Biomathematics*. Berlin: Springer – Verlag.

Jin-Zhu Zhang, Zhen Jin, Quan-Xing Liu & Zhi-Yu Zhang. 2008. Analysis of a Delayed SIR Model with Nonlinear Incidence, Discrete Dynamics in Nature and Society, *Vol. 2008, Article ID 636153*, Hindawi Publishing Corporation.

Kuang,Y. 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, *Vol.191 of Mathematics in Science and Engineering*. Boston: Academic Press.

Kuznetsov, Y.A. 1998. Elements of Applied Bifurcations Theory, Second Editon, Applied Mathematical Sciences 112. New York: Springer – Verlag.

R. Setiawan. 2009. Analisa Kestabilan Ekuilibrium Model Matematika Berbentuk Sistem Persamaan Diferensial Tundaan dengan Waktu Tundaan Diskret. Prosiding Semnas Matematika dan Pend.Matematika, UNY: Yogyakarta, 5 Desember 2009, ISBN: 978-979-16353-3-2, hal : 1064 – 1077.

Verhulst, F. 1990. *Nonlinear Differential Equations and Dyanmical Systems*. Berlin: Springer -Verlag.

Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, *Text in Applied Mathematics*. New York: Springer –Verlag.