PREY-PREDATOR DALAM MODEL DASAR MATEMATIKA

Oleh

Dylmoon Hidayat

Abstrak

Usaha pelestarian dan perbaikan lingkungan saat ini telah sampai pada pembuatan model matematika. Model matematika digunakan untuk membantu penyelesaian masalah secara lebih jelas adakah hubungan fungsional, terutama dihubungkan dengan analisis kuantitatif, yang terdapat pada faktor-faktor dalam masalah tersebut.

Tidak seperti dalam fisika, maka pemodelan matematika pada biologi muncul lebih belakangan. Hal ini disebabkan karena adanya kompleksitas permasalahan yang ada pada biologi lebih tinggi dibanding dalam fisika. Di samping itu, kompleksitas permasalahan sangat berpengaruh dengan kerumitan model matematikanya.

Salah satu contoh model matematika dalam bidang biologi, khususnya dalam ekologi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah model matematika prey-predator pada suatu ekosistem. Proses atau langkah-langkah merumuskan model matematika tersebut menjadi tekanan pada tulisan ini, hingga sampai pada terbentuknya persamaan differensial seperti dikemukakan oleh Lotka dan Volterra.

Pendahuluan

Akhir-akhir ini banyak bermunculan usaha untuk membuat suatu model matematika bagi masalah konkret yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Sebenarnya pembuatan model matematika sudah dilakukan manusia sejak lama, khususnya dalam bidang fisika, misalnya yang telah kita kenal adalah hukum Newton tentang gaya yang merupakan fungsi dari massa dan percepatan ($F = m\ a$).

Usaha pembuatan model dalam bidang biologi tidak secepat dalam bidang fisika. Hal ini disebabkan antara lain karena adanya kompleksitas permasalahan dalam bidang biologi. Kompleksitas tersebut misalnya adalah banyaknya faktor yang berperanan dalam hewan ataupun tumbuhan. Faktor-faktor tersebut tidak dapat dilihat secara langsung seperti halnya pengaruh gaya pada suatu benda.

Tujuan utama tulisan ini adalah untuk memaparkan suatu model dasar matematika tentang masalah interaksi dua spesies hewan, prey dan predator, pada suatu ekosistem. Tujuan lain ialah dengan melihat proses atau langkah-langkah terbentuknya model matematika untuk prey-predator, diharapkan dapat digunakan untuk membuat model matematika lain dalam masalah lingkungan yang lebih kompleks.

Prey dan Predator

Suatu kawasan alam yang di dalamnya tercakup unsur-unsur hayati (organisme) dan unsur-unsur nonhayati (zat tak hidup) serta antara unsur-unsur tersebut terjadi hubungan timbal balik disebut sistem ekologi atau sering dinamakan ekosistem (Resosoedarmo, 1985:7).

Dalam suatu ekosistem terdapat keseimbangan, yaitu kemampuan ekosistem menahan berbagai perubahan dalam sistem secara keseluruhan. Meskipun suatu ekosistem mempunyai daya tahan yang besar terhadap perubahan, biasanya batas keseimbangan dengan mudah diterobos manusia (Resosoedarmo, 1985:14). Sebagai contoh adalah masalah lingkungan hidup. Manusia dengan mudah membuang sampah industri maupun sampah rumah tangga ke sungai. Manusia kurang menyadari bahwa pembuangan sampah ke sungai dapat mengganggu keseimbangan ekosistem.

Dalam suatu ekosistem terjalin hubungan (interaksi) antarspesies yang mungkin mempunyai pengaruh positif atau negatif. Menurut Hadisubroto ada dua macam tipe interaksi, yaitu:

Interaksi Positif

1. Mutualisme: kedua spesies memperoleh keuntungan dari hidup bersama. Contoh bakteri usus dalam sapi . yang memungkinkan sapi menghancurkan selulose, sedangkan bakteri dapat hidup di situ dengan aman.
2. Komensalisme: satu spesies memperoleh keuntungan sedangkan yang lain tidak merasa terganggu. Sebagai contoh adalah ganggang yang hidup di cangkang penyu memperoleh keuntungan tempat, sedangkan penyu tidak merasa terganggu.

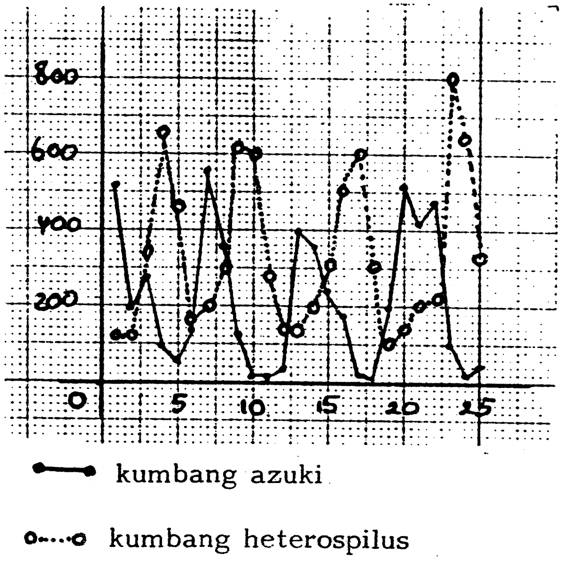
Interaksi Negatif

1. Kompetisi: kedua spesies mengalami kerugian dari hidup bersama. Contoh, sapi dan kerbau yang keduanya memakan rumput akan berkompetisi bila rumput jumlahnya terbatas.
2. Predasi: satu spesies (predator) memakan spesies yang lain (prey) karena itu, yang satu memperoleh keuntungan yang lain dirugikan (Hadisubroto, 1989:93). Sebagai contoh adalah Hiu yang memakan ikan-ikan kecil.

Walaupun tampaknya pada predasi ada hewan yang hilang, namun dalam ekosistem yang seimbang, ikan kecil tidak akan habis dimakan oleh Hiu. Seperti dikemukakan pula oleh Wesley bahwa terdapat stabilitas suatu ekosistem yang dihuni oleh dua jenis hewan, prey dan predator (Watt, 1973: 56).

Contoh lain adalah kumbang azuki (prey) dan kumbang heterospilus (predator). Fluktuasi populasi kumbang azuki dan kumbang heterospilus dapat dilihat pada gambar 1 di bawah ini.

Gambar 1.
Fluktuasi Populasi Prey-Predator
(sumber: Krebs, Charles J, 1985)



Menurut Thohir ada empat cara yang dapat dilakukan manusia untuk mempelajari (meneliti) dalam bidang ekologi, yaitu (1) cara deduksi, (2) cara induksi, (3) cara perbandingan, (4) cara simulasi komputer dan model matematika (Thohir, 1989:40).

Cara induksi menggunakan suatu hipotesis guna meneliti hal ikhwal di lapangan ekologi dan cara induksi didasarkan atas kenyataan. Kalau cara perbandingan digunakan untuk menguji sejauh mana suatu azas yang diajarkan dalam ekologi berlaku, maka cara simulasi komputer dan model matematika adalah meniru atau membuat model. Misalnya, ekosistem buatan untuk merumuskan suatu cara/azas yang berlaku dalam ekosistem yang sesungguhnya.

Tujuan dibuatnya masalah kehidupan nyata menjadi model matematika adalah untuk melihat hubungan atau pengaruh antara faktor-faktor yang ada dalam permasalahan tersebut, terutama jika dikehendaki analisis secara kuantitatif.

Seperti telah disebutkan di bagian depan, membuat model matematika untuk masalah dalam biologi tidak semudah membuat model matematika dalam fisika. Akan tetapi, bukan berarti model tersebut tidak dapat dibuat. Kompleksitas masalah yang ada dapat disederhanakan dengan membuat asumsi-asumsi dasar untuk membatasi pengaruh faktor-faktor luar yang tidak diinginkan.

Sebagai contoh adalah interaksi prey-predator ikan dan hiu. Faktor dari luar yang dapat disebutkan, misalnya tersedianya plankton makanan ikan dan perburuan hiu oleh manusia. Bagaimanakah model dasar matematika untuk prey-predator ikan dan hiu? Ikutilah bagian tulisan berikut ini.

Model Matematika

Misalnya pada suatu ekosistem terjadi interaksi prey-predator antara ikan dan hiu. Asumsi dasar yang pertama ialah daerah di mana ekosistem berlangsung terbatas, artinya tidak dimungkinkan adanya perpindahan, baik ikan maupun hiu yang melewati batas daerah tersebut. Jadi, pertambahan dan pengurangan jumlah, baik ikan maupun hiu, hanyalah tergantung dari jumlah mula-mula dan interaksi mereka pada suatu waktu tertentu.

Secara matematika, keadaan tersebut di atas dapat dikatakan bahwa tingkat perkembangan ikan merupakan fungsi dari ikan dan hiu, demikian juga tingkat perkembangan hiu merupakan fungsi dari ikan dan hiu.

Misalkan F menyatakan jumlah ikan yang merupakan makanan hiu dalam suatu ekosistem di lautan tertentu dan S menyatakan jumlah hiu pemakan ikan tersebut dalam ekosistem yang sama. Maka diperoleh hubungan

$$\frac{dF}{dt} = g\ (F,S) \quad \text{dan} \quad \frac{dS}{dt} = h\ (F,S).$$

$\frac{dF}{dt}$ dan $\frac{dS}{dt}$ berturut-turut menyatakan tingkat perkembangan ikan dan tingkat perkembangan hiu pada suatu waktu tertentu.

Lebih dahulu akan dicari tingkat perkembangan ikan, yaitu fungsi g, yang dapat digambarkan sebagai berikut. Jika tidak ada hiu, maka tingkat perkembangan ikan akan bertambah secara proporsional terhadap jumlah mula-mula, maka hal ini dapat ditulis sebagai

$$\frac{dF}{dt} = aF, \quad \text{dengan a suatu bilangan positif.}$$

Karena terbatasnya plankton (sebagai asumsi kedua), maka akan mempengaruhi tingkat pertumbuhan. Perkembangan akan berhenti pada titik (jumlah) keseimbangan. Sehingga tingkat perhembangan ikan tanpa kehadiran hiu dengan terbatasnya plankton dapat ditulis

$$\frac{dF}{dt} = F\ (a-bF), \text{ dengan b suatu bilangan positif.}$$

Titik $F = \frac{a}{b}$ merupakan titik (jumlah) keseimbangan ikan. Tetapi adanya kehadiran hiu, maka tingkat perkembangan ikan menjadi turun secara proporsional sesuai ikan yang ditangkap hiu. Pada akhirnya, jika c menyatakan suatu bilangan positif, maka tingkat perkembangan ikan dapat ditulis sebagai

$$\frac{dF}{dt} = F\ (a - bF - cS) \qquad \text{... (1)}$$

Sekarang akan dicari tingkat perkembangan hiu, yaitu fungsi h. Tanpa adanya ikan sebagai makanannya, maka tingkat perkembangan hiu akan turun secara proporsional terhadap jumlah mula-mula. Jadi,

$$\frac{dS}{dt} = -\ mS, \quad \text{dengan m suatu bilangan positif.}$$

Dengan tersedianya ikan, maka tingkat pertumbuhan akan naik secara proporsional sesuai ikan yang ditangkap. Jika n suatu bilangan positif, maka hal ini dapat ditulis sebagai

$$\frac{dS}{dt} = S\,(-m + nF) \qquad \dots (2)$$

Kedua persamaan differensial (1) dan (2) telah dikembangkan secara terpisah oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1920 (Haberman, 1977:226).

Jadi, sistem persamaan differensial

$$\frac{dF}{dt} = F\,(a - bF - cS)$$

$$\frac{dS}{dt} = S\,(-m + nF)$$

dapat digunakan sebagai model matematika yang menggambarkan interaksi prey-predator, khususnya ikan dan hiu dalam suatu ekosistem pada suatu waktu tertentu.

Sistem persamaan differensial tersebut bukanlah satu-satunya model matematika prey-predator yang mungkin, tetapi model Lotka dan Volterra itu merupakan suatu model matematika untuk prey-predator yang paling sederhana.

Keseimbangan

Penyelesaian model Lotka dan Volterra untuk prey-predator cukuplah rumit dan membutuhkan matematika yang tinggi. Untuk itu akan dicari penyelesaian yang sederhana dengan menghilangkan asumsi yang mengatakan bahwa persediaan plankton terbatas. Jadi, dalam hal ini b diberi nilai 0. Sehingga persamaan Lotka dan Volterra menjadi

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F\,(a - cS) \\ \frac{dS}{dt} &= S\,(-m + nF) \end{aligned}\right\} \qquad \dots (3)$$

Sistem persamaan differensial (3) di atas dapat dibawa ke dalam sistem persamaan differensial terpisah sebagai berikut

$$\frac{dF}{dS} = \frac{dF}{dt}.\frac{dt}{dS} = \frac{F\,(a - cS)}{S\,(-m + nF)}$$

sehingga menjadi

$$\frac{nF - m}{F}\, dF = \frac{a - cS}{S}\, dS$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh

$$nF - m \operatorname{Ln} F = a \operatorname{Ln} S - c\,S + E \qquad \ldots (4)$$

di mana E menyatakan konstanta yang menyatakan jumlah awal ikan $F(t_o) = F_o$ dan hiu $S(t_o) = S_o$. Untuk setiap satu nilai E kita mendapatkan satu penyelesaian sistem persamaan differensial (3).

Bentuk eksponen dari penyelesaian implisit (4) adalah

$$F^{-m}\, e^{nF} = E_o\, E^{-cS}\, S^a, \text{ di mana } E_o = e^E.$$

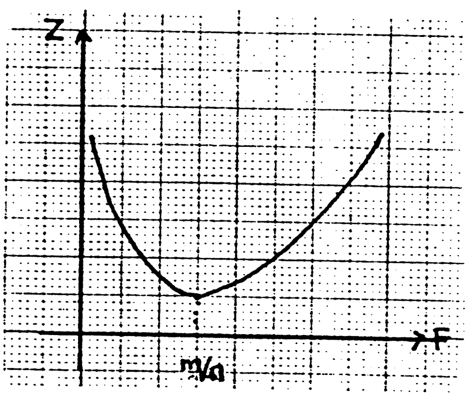
Dengan memasukkan variabel baru Z di mana

$$Z = F^{-m}\, e^{nF} \qquad \text{dan}$$

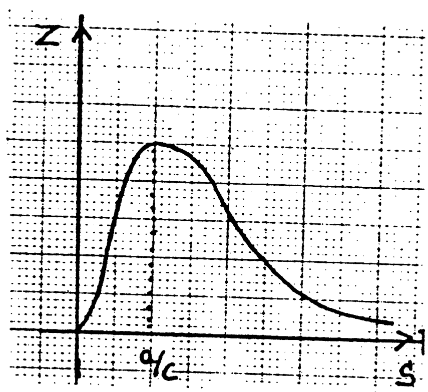
$$Z = E_o\, E^{-cS}\, S^a$$

maka diperoleh dua kurva dalam sumbu ZF dan ZS seperti gambar 2 dan gambar 3.

Gambar 2. Kurva $Z = F^{-m}\, e^{nF}$

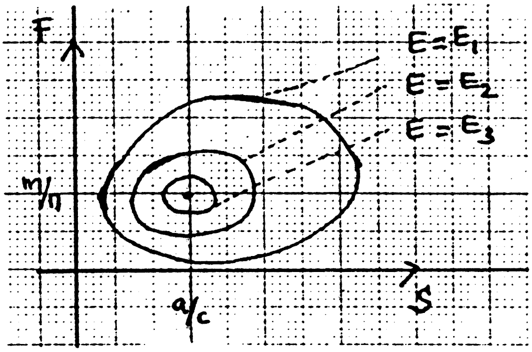


Gambar 3. Kurva $Z = E_o E^{-cS}\, S^a$

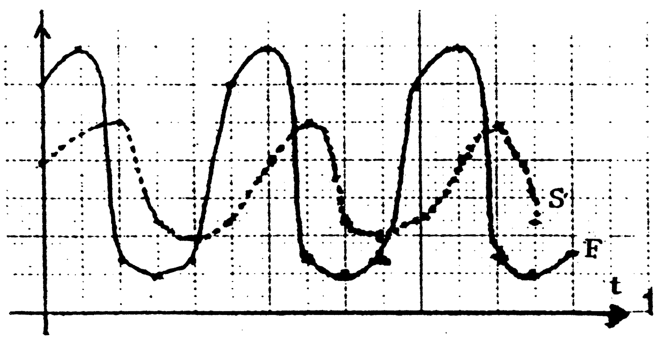


Jika kedua kurva digabungkan, maka diperoleh suatu kurva tertutup seperti gambar 4.

Gambar 4. Kurva $F^{-m} e^{nF} = E_o E^{-cS} S^a$, dengan $E_o = e^E$, untuk beberapa nilai E



Gambar 5. Fluktuasi Populasi Ikan dan Hiu Model Matematika Lotka-Volterra



F : ikan
S : hiu
t : waktu

Kurva tertutup mempunyai arti bahwa terdapat keseimbangan ekosistem antara prey dan predator, seperti dikemukakan oleh Wesley. Jika ikan (F) dan Hiu (S) dijadikan satu sumbu dan waktu (t) sumbu yang lain, maka diperoleh kurva osilasi populasi dari ikan dan hiu seperti terlihat pada gambar 5. Bandingkan hasil ini dengan fluktuasi populasi kumbang azuki dan kumbang heterospilus pada gambar 1 di depan.

Periodisitas

Seperti telah disebutkan di bagian depan bahwa populasi kedua spesies, baik prey (ikan) maupun predator (hiu) seimbang, maka secara periodik keadaan populasi akan kembali seperti semula, hal ini berarti dibutuhkan suatu waktu kapan akan berosilasi. Berapa waktu yang dibutuhkan untuk berosilasi?

Misalkan persamaan (2) ditulis kembali dalam waktu t, maka menjadi

$$\frac{dS(t)}{dt} = S(t)\,(-m + n\,F(t)).$$

Bagi dengan S(t), diperoleh persamaan diferensial terpisah

$$\frac{1}{S(t)}\,dS(t) = (-m + n\,F(t))\,dt.$$

Integralkan sepanjang waktu periodiknya $T = t_1 - t_o$, diperoleh

$$\int_{t_o}^{t_1} \frac{dS(t)}{S(t)} = \int_{t_o}^{t_1} (-m + nF(t))\,dt$$

Ini berarti

$$\text{Ln } S(t_1) - \text{Ln } S(t_o) = -m(t_1 - t_o) + n \int_{t_o}^{t_1} F(t)\,dt.$$

dan karena $S(t_1) = S(t_o)$, maka

$$0 = -mT + n \int_{t_o}^{t_1} F(t)\,dt.$$

Sehingga

$$\frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} F(t)\,dt = \frac{m}{n} \qquad \ldots (5)$$

Karena ruas kiri persamaan (5) merupakan *nilai rata-rata integral*, maka secara matematika hal itu berarti bahwa nilai (jumlah) rata-rata ikan sepanjang waktu periodiknya adalah sama dengan jumlah populasi keseimbangan ikan itu sendiri. Sungguh suatu hal yang sangat menarik diperolehnya kenyataan bahwa jumlah rata-rata populasi prey sama dengan jumlah populasi keseimbangan prey. Demikian pula dengan cara yang sama akan diperoleh bahwa jumlah rata-rata populasi predator akan sama dengan jumlah populasi keseimbangannya.

Demikianlah uraian model dasar matematika (sederhana) interaksi prey dan predator dalam suatu ekosistem untuk model waktu yang kontinu. Karena adanya perbedaan pendekatan analisis matematika dalam menguraikan model prey-predator untuk waktu diskrit, sehingga akan menjadi cukup panjang pembahasannya, maka kali ini hanya dibicarakan model waktu yang kontinu saja. Bagi pembaca yang ingin mengetahui model waktu diskrit, dapat membaca buku "Mathematical Ideas in Biology" oleh Maynard.

Kesimpulan

Usaha manusia untuk mempelajari ekologi, khususnya mengenai kelestarian atau keseimbangan ekosistem telah sampai pada pembuatan model matematika.

Model dasar matematika untuk prey dan predator seperti dikemukakan oleh Lotka dan Volterra dapat digunakan sebagai dasar untuk mengembangkan suatu model matematika yang lebih kompleks, tidak hanya untuk masalah prey-predator saja, tetapi juga untuk masalah lingkungan secara umum. Namun, untuk menuju pengembangan yang mempunyai kompleksitas tinggi, dibutuhkan kemampuan matematika yang tidak rendah. Oleh karena itu, sangat dibutuhkan campur tangan orang-orang matematika dalam usaha pemahaman proses pelestarian dan perbaikan lingkungan.

Daftar Pustaka

Hadisubroto, T. 1989. *Ekologi Dasar.* Jakarta: Depdikbud, Ditjendikti, Proyek Pengembangan LPTK.

Haberman, R. 1977. *Mathematical Models.* Englewood Cliff. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Krebs, Charles J. 1985. *Ecology: The Experimental Analysis of Distribution and Abundance.* Third Ed. New York: Harper and Row Pub.

Maynard, Smith J. 1968. *Mathematical Ideas in Biology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Resosoedarmo, R.S. 1985. *Pengantar Ekologi*. Jakarta: Fakultas Pasca Sarjana IKIP JAKARTA bekerja sama dengan BKKBN.

Thohir, K.A. 1985. *Butir-butir Tata Lingkungan*. Jakarta: PT Bina Aksara.

Watt, K.E.E. 1974. *Principles of Environmental Science*. New York: Mc Graw Hill.