

## Kendali Optimal Model Matematika Penyebaran Rumor pada Jaringan Sosial Daring dengan Pemberian Pernyataan Balasan

Wahyuni Ningsih, Sumardi, Indah Ria Riskiyah, Deni Putra Arystianto

Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Malang

wahyuni.ningsih.04@gmail.com, sumardi.polinema@gmail.com, indahriskiyah01@gmail.com, depe\_arch@yahoo.com

---

### Info Artikel

#### Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019

Direvisi: 18 November 2019

Diterbitkan: 15 Januari 2020

---

#### Kata Kunci:

Epidemik

Kendali Optimal

Jaringan Sosial Daring

Prinsip Pontryagin

Rumor

---

### ABSTRAK

Pada era revolusi industri 4.0 ini, penggunaan alat digital tidak terbatas pada usia bahkan status sosial di masyarakat. Dukungan jaringan internet yang mudah dijangkau oleh alat digital yang digunakan pengguna menjadikan semakin cepatnya penyebaran informasi atau berita. Informasi yang tersebar tersebut tidak sedikit yang belum jelas keakuratannya. Sehingga dapat dikatakan bahwa informasi yang tersebar tersebut bisa saja hanya suatu rumor. Rumor yang tersebar secara cepat dan bersifat epidemik tersebut dapat merugikan beberapa pihak, minimal dapat menimbulkan keresahan masyarakat. Fenomena ini sangat menarik untuk dilakukan kajian atau penelitian lebih dalam. Sehingga upaya pengendalian terhadap penyebaran rumor tersebut diperlukan. Salah satu upaya pengendalian yang bisa dilakukan yaitu dengan menggunakan pernyataan balasan. Pemanfaatan Prinsip Pontryagin dalam melakukan pengendalian optimal juga dikenalkan pada penelitian ini. Melalui penggunaan pernyataan balasan dan pemanfaatan Prinsip Pontryagin inilah desain sistem kendali optimal model matematika penyebaran rumor pada jaringan sosial daring diperoleh untuk meminimumkan jumlah pengadopsi rumor dan biaya pengendalian. Hasil pengendalian penyebaran rumor dengan adanya pernyataan balasan dan pemanfaatan Prinsip Pontryagin menunjukkan bahwa penyebaran rumor dapat dikendalikan secara signifikan.

Copyright © 2019 SIMANIS.

All rights reserved.

---

### Korespondensi:

Wahyuni Ningsih,

Jurusan Teknik Sipil,

Politeknik Negeri Malang,

Jl. Soekarno Hatta No.9, Jatimulyo, Kec. Lowokwaru, Kota Malang, Jawa Timur 65141,

wahyuni.ningsih.04@gmail.com

---

## 1. PENDAHULUAN

Pada masa yang segala sesuatunya serba digital seperti sekarang ini, manusia menjadi semakin mudah dalam berinteraksi. Tidak memerlukan waktu yang lama atau biaya yang besar untuk bisa mendapatkan atau memberikan informasi melalui jaringan sosial daring. Informasi yang diperoleh atau yang disebarkan tersebut bisa berupa rumor. Rumor sendiri merupakan suatu informasi yang menjadi minat publik untuk disimak akan tetapi belum dipastikan kebenarannya. Sehingga penyebaran rumor yang melalui jaringan sosial daring tentu akan semakin cepat tersampaikan. Dampak dari penyebaran rumor yang tidak terkendali dapat merugikan beberapa pihak, mulai dari dampak yang sederhana seperti keresahan masyarakat, sampai dampak yang fatal seperti kematian. Kondisi penyebaran rumor melalui jaringan sosial daring yang bersifat epidemi ini menjadi hal yang menarik untuk dikaji dan diteliti lebih dalam. Berdasarkan konsep epidemi yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick [1], fenomena epidemi ini dapat dimodelkan dalam bentuk matematika. Pemodelan matematika penyebaran rumor dan analisisnya telah dilakukan oleh beberapa peneliti seperti [2], [3], [4]. Hal ini didasarkan pada asumsi dan variabel yang diambil oleh masing-masing peneliti. Begitu juga dengan upaya pengendalian terhadap penyebaran rumor telah dilakukan oleh [4]-[11]. Pengendalian yang dilakukan oleh [4] berupa penambahan parameter kendali pada model penyebaran rumor yang dibentuk. Sehingga nilai parameter

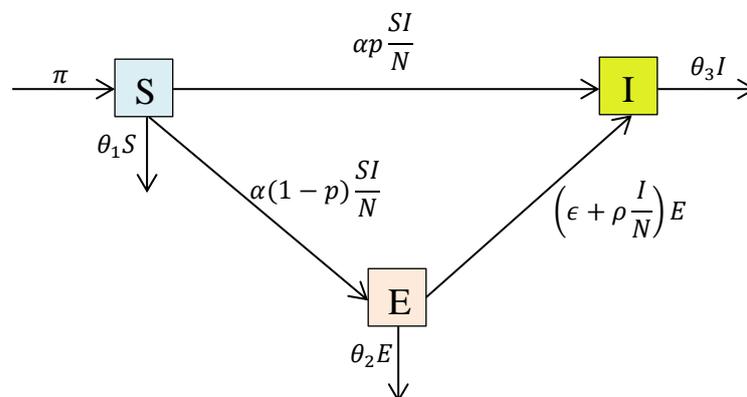
---

kendali tersebut langsung diberikan. Kemudian model yang dikenalkan [4] digunakan oleh [12] untuk dilakukan pengendalian dengan menambahkan asumsi bahwa ada waktu tunda bagi *thinker* untuk menyebarkan berita. Model yang dikendalikan pada penelitian ini juga menggunakan model yang dikenalkan oleh [4]. Perbedaan penelitian ini dengan yang dilakukan oleh [12], pada penelitian ini tidak memperhatikan waktu tunda. Sehingga dengan kata lain, jika [4] mengasumsikan strategi pengendalian yang dilakukan dengan menambahkan parameter kendali yang nilainya sudah langsung diberikan, maka pada penelitian ini menjadikan parameter kendali tersebut sebagai suatu variabel kendali yang nilainya diperoleh melalui teori kendali optimal menggunakan prinsip Pontryagin [13].

## 2. METODE PENELITIAN

Model matematika penyebaran rumor pada jaringan sosial daring yang dikaji dalam penelitian ini adalah model matematika yang dikenalkan oleh [4]. Asumsi yang dibangun pada penyebaran rumor ini yaitu adanya tiga kelompok yang didasarkan pada model epidemi tipe SEI. Tiga kelompok tersebut adalah S (*susceptible*) yaitu kelompok *non-adopter* yang menggunakan jaringan sosial daring dan tidak menyebarkan rumor; E (*exposed*) yaitu kelompok *thinker* yang masih berfikir tentang berita yang diperoleh dari kelompok S; I (*infected*) yaitu kelompok *adopter* yang bersifat menyebarkan rumor baik yang diterima langsung dari S maupun dari kelompok E. Laju perubahan jumlah anggota ketiga kelompok ini dipengaruhi oleh waktu  $t$ .

Pada kondisi sebenarnya, diasumsikan laju perubahan jumlah anggota kelompok S dipengaruhi oleh tingkat masuknya *user* baru sebesar  $\pi$ , dan akan berkurang ketika S berinteraksi dengan I sebesar  $\alpha \frac{SI}{N}$  sehingga mempengaruhi laju perubahan kelompok E serta akan mempengaruhi laju perubahan jumlah kelompok I ketika terdapat kemungkinan untuk menyebarkan rumor sebesar  $\alpha p \frac{SI}{N}$ . Laju perubahan kelompok I dipengaruhi oleh interaksi antara E dengan I sebesar  $\rho \frac{EI}{N}$ , dan juga ketika E yang langsung menjadi I sebesar  $\epsilon E$ . Masing-masing laju perubahan kelompok ini diasumsikan mengalami pengurangan jumlah anggota secara alami sebesar  $\theta_1$  untuk S,  $\theta_2$  untuk E, dan  $\theta_3$  untuk I. Asumsi yang dibangun ini dapat diilustrasikan dalam diagram kompartemen yang ditunjukkan oleh Gambar 1.

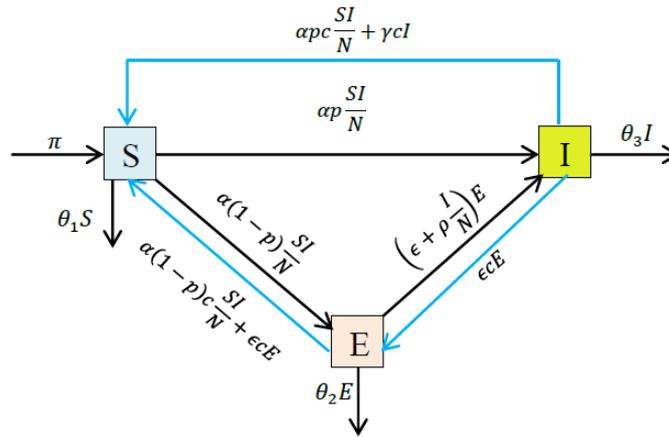


Gambar 1. Diagram kompartemen penyebaran rumor pada jaringan sosial daring

Berdasarkan asumsi dan diagram kompartemen yang dibentuk, dapat dituliskan model matematikanya seperti yang ditunjukkan oleh sistem dinamis (1).

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi - \alpha \frac{SI}{N} - \theta_1 S; \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha(1-p) \frac{SI}{N} - \rho \frac{EI}{N} - (\epsilon + \theta_2)E; \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha p \frac{SI}{N} + \rho \frac{EI}{N} + \epsilon E - \theta_3 I \end{aligned} \quad (1)$$

Kemudian dilakukan upaya pengendalian terhadap penyebaran rumor ini dengan memberikan pernyataan balasan. Pernyataan balasan ini diasumsikan sebagai parameter  $c$ . Serta diasumsikan tingkat kemungkinan *adopter* menjadi *non-adopter* sebesar  $\gamma c I$ . Upaya pengendalian ini diilustrasikan oleh diagram kompartemen pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram kompartemen penyebaran rumor dengan pemberian pernyataan sebagai parameter kendali  $c$

Hasil pengendalian yang dilakukan oleh [4] dengan penambahan parameter kendali  $c = 0.4$  mengakibatkan laju perubahan jumlah *non-adopter* mengalami peningkatan seiring dengan penurunan laju perubahan jumlah *adopter*.

Dengan menggunakan diagram kompartemen pada Gambar 2, Pada penelitian ini diterapkan metode optimasi berbasis teori kendali. Sistem pengendalian pada teori kendali dibedakan atas sistem kendali klasik dan modern [13]. Teori kendali klasik hanya pada *single input and single output* (SISO) yang didasarkan pada teori transformasi Laplace dan penggunaannya direpresentasikan ke dalam bentuk Diagram Blok seperti yang dikerjakan oleh [14]. Sedangkan teori kendali modern salah satu komponennya yaitu penerapan Prinsip maksimum/minimum Pontryagin [13], [15]. Model penyebaran rumor dengan parameter kendali  $c$  dapat dibentuk sesuai diagram kompartemen pada Gambar 2. Pada penelitian ini, parameter kendali  $c$  diasumsikan sebagai variabel kendali  $u(t) = c$  dan tidak memperhatikan waktu tunda. Sehingga model matematika penyebaran rumor dengan kendali ditunjukkan oleh sistem dinamis (2).

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi + \gamma u I + \epsilon u E + (u - 1)\alpha \frac{SI}{N} - \theta_1 S; \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha(1 - p)(1 - u) \frac{SI}{N} - \rho \frac{EI}{N} - (\epsilon + \theta_2)E; \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha p(1 - u) \frac{SI}{N} + \rho \frac{EI}{N} + \epsilon(1 - u)E - \gamma u I - \theta_3 I \end{aligned} \tag{2}$$

Pada teori kendali optimal, sistem dinamis (2) disebut sebagai persamaan variabel state atau *plant*, dengan variabel kendali  $u(t)$ . Tujuan dari pengendalian ini untuk meminimumkan *adopter* I dan biaya pengendalian yang dihubungkan dengan ukuran pengaruh pemberian pernyataan balasan pada jaringan sosial daring, sehingga performa index atau fungsional objektif yang digunakan pada penelitian ini ditunjukkan oleh persamaan (3).

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[ I(t) + \frac{\beta}{2} u^2(t) \right] dt \tag{3}$$

Dengan  $\beta$  adalah parameter bobot positif pada performa index  $J$ . Kondisi batas yang digunakan, diasumsikan sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= 0, t_f = T \\ 0 &\leq t \leq T; t \in R_+ \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Solusi dari permasalahan pengendalian optimal menggunakan prinsip Pontryagin ini dilakukan dengan memperhatikan langkah-langkah berikut [13]:

1. Pernyataan permasalahan yang akan dikendalikan  
 tujuan utama pengendalian optimal adalah untuk menentukan nilai dari variabel kendali  $u(t)$  yang optimal sehingga menyebabkan sistem dinamis memenuhi beberapa kendala fisis dan pada waktu yang sama dapat meminimumkan atau memaksimalkan performa index. Permasalahan kendali optimal dalam bentuk formula matematika bertujuan mencari nilai variabel kendali  $u(t)$  yang mengoptimalkan performa index (6) dengan sistem dinamis (5) dan kondisi batas (7).  
 ➤ Model matematika dengan variabel kendali

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \quad (5)$$

- Performa Index yang digunakan

$$J = S(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt \quad (6)$$

- Kondisi batas yang diasumsikan dengan

$$\vec{x}(t_0) = x_0 \text{ dan } \vec{x}(t_f) = x_f \quad (7)$$

Performa index  $J$  pada persamaan (6) disebut persamaan index tipe Bolza. Sementara jika  $S(\vec{x}(t_f), t_f) = 0$  maka  $J$  disebut tipe Lagrange. Akan tetapi, jika  $V(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) = 0$  maka  $J$  disebut tipe Meyer.

## 2. Solusi permasalahan

Langkah-langkah penyelesaian masalah kendali optimal yaitu

- i. Bentuklah fungsi Pontryagin Hamiltonian

$$H(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\lambda}(t), t) = V(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) + \lambda'(t) \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

- ii. Minimumkan/Maksimumkan fungsi Pontryagin terhadap semua vektor control  $\vec{u}(t)$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{u}}\right)_* = 0 \text{ dan memperoleh } \vec{u}^*(t) = \vec{h}(\vec{x}^*(t), \vec{\lambda}^*(t), t)$$

- iii. Gunakan hasil pada tahap ii ke dalam tahap i untuk menentukan fungsi Hamiltonian yang optimal

$$H^*(\vec{x}^*(t), \vec{h}(\vec{x}^*(t), \vec{\lambda}^*(t), t), \vec{\lambda}^*(t), t) = H^*(\vec{x}^*(t), \vec{\lambda}^*(t), t)$$

- iv. Selesaikan himpunan dari  $2n$  persamaan diferensial

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\right)_* \text{ dan } \dot{\vec{\lambda}}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{\lambda}}\right)_*$$

Dengan kondisi awal  $x_0$  dan kondisi akhir

$$\left[ H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \right)_* - \vec{\lambda}^*(t) \right]_{t_f}' \delta \vec{x}_f = 0$$

- v. Substitusikan solusi dari  $\vec{x}^*(t), \vec{\lambda}^*(t)$  dari tahap iv ke dalam ekspresi untuk kendali optimal  $\vec{u}^*(t)$  di tahap ii.

Setelah menerapkan prinsip Pontryagin pada sistem dinamis (2), selanjutnya dilakukan simulasi numerik dengan memanfaatkan toolbox DOTcvpSB [16],[17] pada bahasa pemrograman MATLAB guna mengetahui hasil interpretasi sistem dinamis saat dilakukan pengendalian dalam bentuk grafik. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik ditunjukkan oleh Tabel 1[4].

Tabel 1 Nilai Parameter pada Model Penyebaran Rumor

Parameter	Nilai
$\pi$	0.3
$\alpha$	0.4
$\theta_1$	0.1
$\theta_2$	0.1
$\theta_3$	0.4
$\gamma$	0.2
$\epsilon$	0.3
$p$	0.5
$\rho$	0.6
$\beta$	0.1

dengan asumsi nilai awal tiap variabel  $S(t_0) = S_0 = 1, E(t_0) = E_0 = 1, \text{ dan } I(t_0) = I_0 = 1.$

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini ditunjukkan solusi pengendalian dan simulasi numerik beserta analisisnya.

### 3.1. Daerah Batas Penyelesaian

Daerah batas penyelesaian sistem dinamis (2) diperoleh dengan cara mengasumsikan bahwa jumlah total anggota kelompok  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$ . Sehingga laju perubahan jumlah total kelompok terhadap satuan waktu yaitu

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dE(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan sistem dinamis (2) ke (8) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= \pi - \theta_1 S(t) - \theta_2 E(t) - \theta_3 I(t) \\ &= \pi - \theta N(t)\end{aligned}$$

Dimana  $\theta = \min(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ .

Dengan menentukan nilai optimum dari  $\frac{dN(t)}{dt}$ , maka diperoleh daerah batas penyelesaian sistem dinamis yaitu

$$0 \leq N(t) \leq \frac{\pi}{\theta} \quad \text{atau} \quad 0 \leq S(t) + E(t) + I(t) \leq \frac{\pi}{\theta}$$

Selanjutnya nilai tiap kelompok diasumsikan bernilai positif, yaitu

$$S, E, I \geq 0$$

Dan batas variabel kendali  $u(t)$  yaitu

$$\Omega = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq T, u, t \in R\}$$

### 3.2. Penyelesaian Kendali Optimal

Kendali optimal pada sistem dinamis diperlukan untuk menentukan nilai  $u(t)$  yang optimal sedemikian hingga performa index (3) minimum. Solusi kendali optimal diperoleh dengan menentukan Lagrangian dari (3) yaitu

$$L(S, E, I, u) = I(t) + \frac{\beta}{2} u^2(t)$$

Kemudian dibentuk fungsi Hamiltonian yaitu

$$H = L(S, E, I, u) + \lambda^T f(S(t), E(t), I(t), u(t), t)$$

Dengan

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad f(S(t), E(t), I(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} \frac{dS(t)}{dt} \\ \frac{dE(t)}{dt} \\ \frac{dI(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}H &= I(t) + \frac{\beta}{2} u^2(t) + \lambda_1 \left[ \pi + \gamma u I + \epsilon u E + (u - 1) \alpha \frac{SI}{N} - \theta_1 S \right] \\ &\quad + \lambda_2 \left[ \alpha(1 - p)(1 - u) \frac{SI}{N} - \rho \frac{EI}{N} - (\epsilon + \theta_2) E \right] \\ &\quad + \lambda_3 \left[ \alpha p(1 - u) \frac{SI}{N} + \rho \frac{EI}{N} + \epsilon(1 - u) E - \gamma u I - \theta_3 I \right]\end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan kondisi stasioner dari Hamiltonian dengan meminimumkan fungsi  $H$  terhadap  $u$  yaitu

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) &= 0 \\ \beta u^*(t) + \lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] + \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ -\alpha p \frac{S^* I^*}{N} - \epsilon E^* - \gamma I^* \right] &= 0 \\ u^*(t) &= \frac{1}{\beta} \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right]\end{aligned}$$

Sehingga nilai variabel kendali  $u^*(t)$  yang optimal yaitu

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta} \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right] \right\}, 1 \right\}$$

Setelah diperoleh formula kendali  $u^*(t)$  optimal, kemudian ditentukan fungsi Hamiltonian  $H^*$  yang optimal dengan mensubstitusikan  $u^*(t)$  ke dalam  $H$ . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}H^* &= I^*(t) + \frac{1}{2\beta} \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right]^2 + \lambda_1^* \left[ \pi + \right. \\ &\quad \left. \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right] (\gamma I^* + \epsilon E^*) + \left( \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right] - 1 \right) \alpha \frac{S^* I^*}{N} - \theta_1 S^* \right] + \lambda_2^* \left[ \alpha(1 - p) \left( 1 - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right] \right) \frac{S^* I^*}{N} - \rho \frac{E^* I^*}{N} - (\epsilon + \theta_2) E^* \right] + \right. \\ &\quad \left. \lambda_3^* \left[ \alpha p \left( 1 - \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right) \right] \frac{S^* I^*}{N} + \rho \frac{E^* I^*}{N} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \epsilon E^* - \left[ -\lambda_1^* \left[ \gamma I^* + \epsilon E^* + \alpha \frac{S^* I^*}{N} \right] - \lambda_2^* \left[ \frac{\alpha(p-1)S^* I^*}{N} \right] + \lambda_3^* \left[ \alpha p \frac{S^* I^*}{N} + \epsilon E^* + \gamma I^* \right] \right] (\epsilon E^* + \gamma I^*) - \theta_3 I^* \right]\end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan variable state dan costate yang optimal, yaitu

➤ Variabel state

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS(t)}{dt}\right)^* &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\right)^* = \left[\pi + \gamma u I^* + \epsilon u E^* + (u - 1)\alpha \frac{S^* I^*}{N} - \theta_1 S^*\right] \\ \left(\frac{dE(t)}{dt}\right)^* &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}\right)^* = \left[\alpha(1 - p)(1 - u) \frac{S^* I^*}{N} - \rho \frac{E^* I^*}{N} - (\epsilon + \theta_2) E^*\right] \\ \left(\frac{dI(t)}{dt}\right)^* &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_3}\right)^* = \left[\alpha p(1 - u) \frac{S^* I^*}{N} + \rho \frac{E^* I^*}{N} + \epsilon(1 - u) E^* - \gamma u I^* - \theta_3 I^*\right] \end{aligned}$$

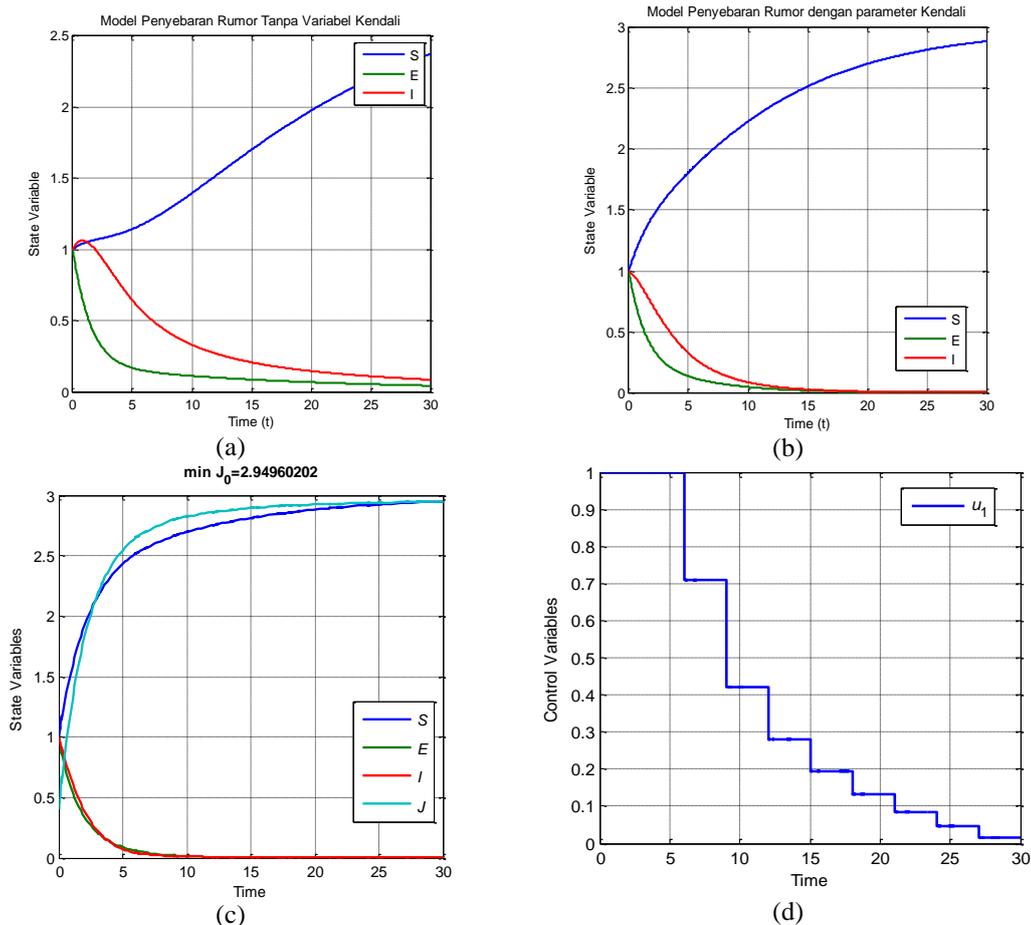
➤ Variabel costate

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^* &= -\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)^* = -\lambda_1^* \left[(u^* - 1)\alpha \frac{I^*}{N} - \theta_1\right] - \lambda_2^* \alpha(1 - p)(1 - u^*) \frac{I^*}{N} - \lambda_3^* \alpha p(1 - u^*) \frac{I^*}{N} \\ \left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^* &= -\left(\frac{\partial H}{\partial E}\right)^* = -\lambda_1^* \epsilon u^* - \lambda_2^* \left[-\rho \frac{I^*}{N} - (\epsilon + \theta_2)\right] - \lambda_3^* \left[\rho \frac{I^*}{N} + \epsilon(1 - u^*)\right] \\ \left(\frac{d\lambda_3}{dt}\right)^* &= -\left(\frac{\partial H}{\partial I}\right)^* = -1 - \lambda_1^* \left[\gamma u^* + (u^* - 1)\alpha \frac{S^*}{N}\right] - \lambda_2^* \left[\alpha(1 - p)(1 - u^*) \frac{S^*}{N} - \rho \frac{E^*}{N}\right] - \\ &\quad \lambda_3^* \left[\alpha p(1 - u^*) \frac{S^*}{N} + \rho \frac{E^*}{N} - \gamma u - \theta_3\right] \end{aligned}$$

Karena variabel state dan costate berbentuk nonlinear sehingga untuk mendapatkan solusi variabel kendali  $u^*(t)$  tidak bisa diselesaikan secara analitik. Maka dari itu digunakan bantuan toolbox DOTcvpSB pada bahasa pemrograman MATLAB guna mendapatkan solusi numerik yang direpresentasikan dalam bentuk grafik.

### 3.3. Simulasi dan Analisis Hasil

Pada simulasi numerik ini ditunjukkan hasil simulasi model sebelum dikenakan strategi pengendalian dan hasil simulasi setelah dilakukan pengendalian. Pada simulasi ini digunakan nilai parameter yang ditunjukkan oleh Tabel 1 [4]. Hasil simulasi numeric ditunjukkan oleh Gambar 3.



Gambar 3. (a). Profil Model Penyebaran Rumor tanpa Pengendalian; (b). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Parameter Kendali; (c). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Variabel Kendali; (d). Profil Variabel Kendali  $u(t)$

Pada Gambar 3, terlihat sekali perbedaan perilaku sistem dinamis model penyebaran rumor tanpa pengendalian dengan ketika diberikan strategi pengendalian. Gambar 3(b) menunjukkan hasil strategi pengendalian dengan penambahan parameter kendali yang dilakukan oleh [4]. Sementara Gambar 3(c) menunjukkan hasil strategi pengendalian menggunakan Prinsip Pontryagin dan diperoleh nilai performa index  $J = 2.94960202$ , dengan profil variabel kendali  $u(t)$  ditunjukkan oleh Gambar 3(d).

Tabel 2. Perbandingan Nilai Variabel State dari Masing-masing Model terhadap Waktu

Waktu (t)	Variabel State	Model Penyebaran Rumor tanpa Pengendalian	Model Penyebaran Rumor dengan Parameter Kendali,	Model Penyebaran Rumor dengan Variabel Kendali (Prinsip Pontryagin)
10	S	1.3956	2.2282	2.6960
	E	0.1109	0.0450	0.0144
	I	0.3302	0.0846	0.0122
20	S	1.9757	2.7023	2.8809
	E	0.0670	0.0050	0.0020
	I	0.1454	0.0073	0.0033
30	S	2.3729	2.8895	2.9514
	E	0.0425	0.0005	0.0009
	I	0.0844	0.0007	0.0017

Tabel 2 menunjukkan nilai dari tiap variabel state terhadap tiga waktu  $t$  yang didasarkan pada hasil simulasi Gambar 3 untuk masing-masing model. Sesuai dengan nilai awal dari tiap variabel state yang telah diberikan sebelumnya yaitu  $S_0 = 1, E_0 = 1, I_0 = 1$ , dan kondisi batas  $0 \leq N \leq \frac{\pi}{\theta}$ ,  $\theta = \min \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$

Sehingga

$$\begin{aligned} N_0 &\leq 3 \\ S_0 + E_0 + I_0 &\leq 3 \end{aligned}$$

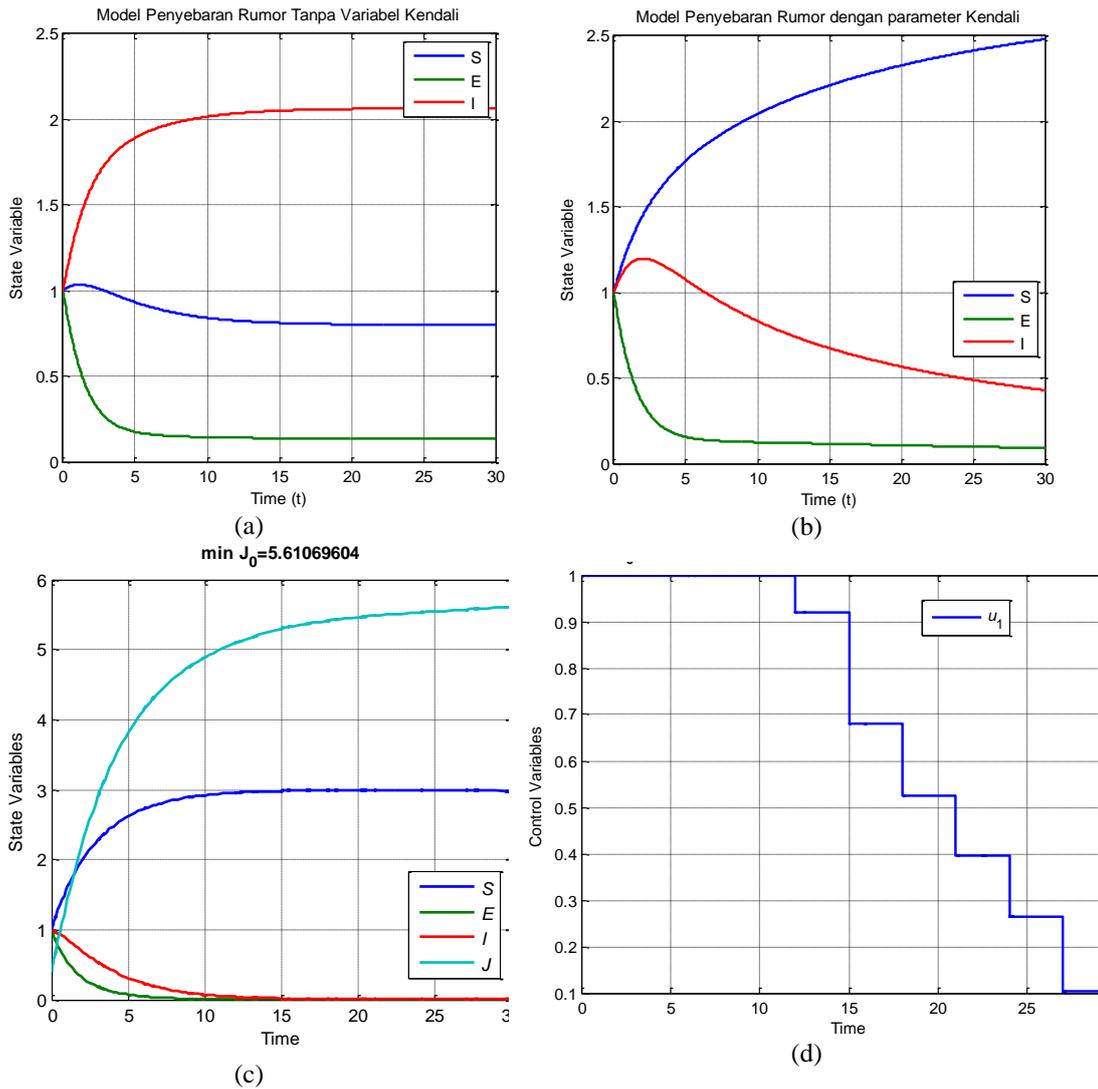
Maka dapat dilihat bahwa jumlah nilai tiap variabel state tersebut kurang dari 3.

Pada Tabel 2 terlihat bahwa jumlah kelompok *non-adopter* pada model penyebaran rumor dengan variabel kendali (Prinsip Pontryagin) lebih cepat mengalami kenaikan daripada yang tanpa menggunakan Prinsip Pontryagin. Begitu juga dengan tingkat penurunan jumlah *adopter* dan *thinker* lebih cepat saat diterapkan teori kendali dengan Prinsip Pontryagin dibandingkan dengan tanpa menerapkan Prinsip Pontryagin. Kondisi ini juga bisa ditunjukkan dengan memasukkan asumsi nilai parameter yang lain selain pada Tabel 1, seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 3.

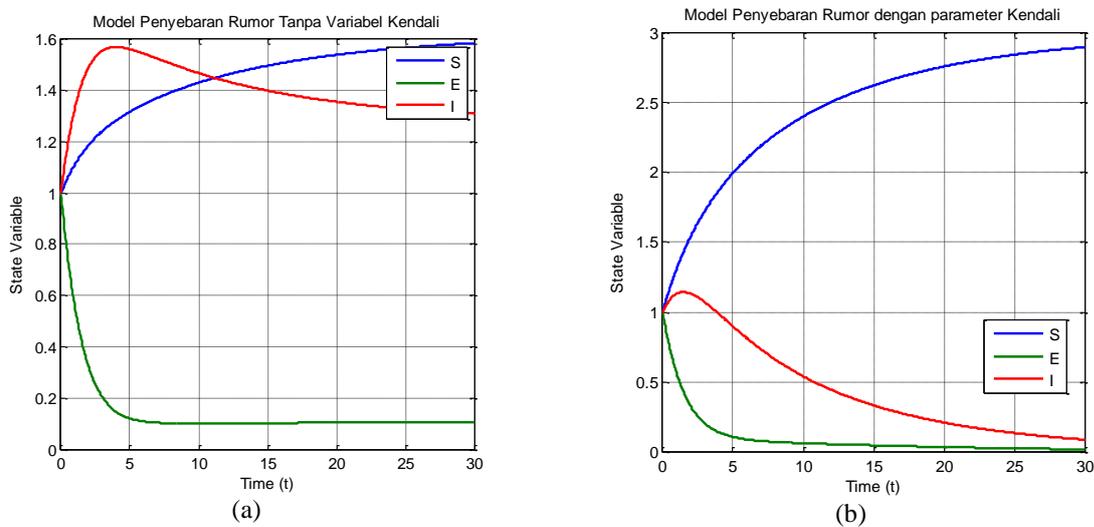
Tabel 3. Asumsi nilai parameter

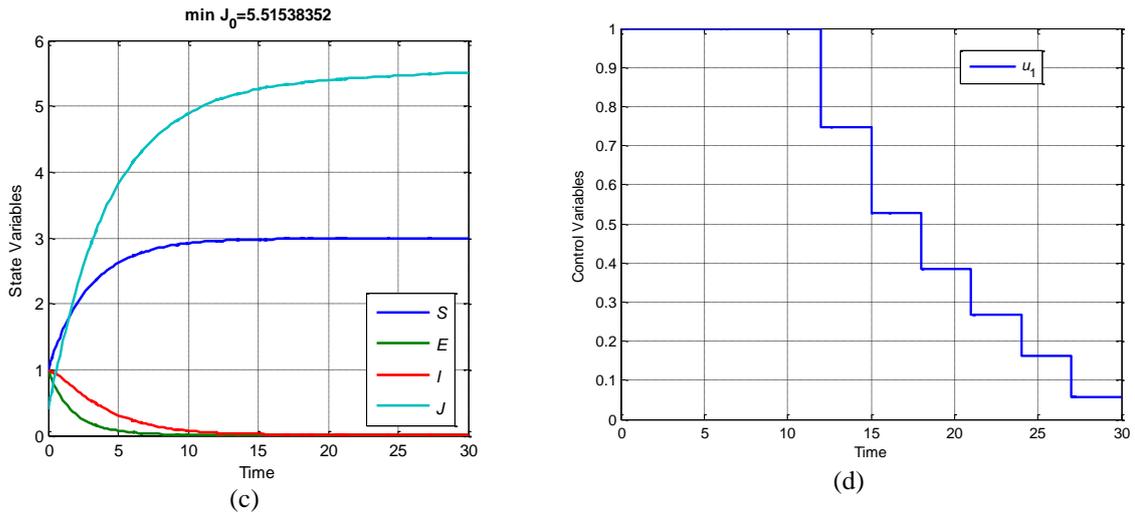
Parameter	Asumsi 2	Asumsi 3	Asumsi 4
$\pi$	0.3	0.3	0.3
$\alpha$	0.4	0.2	0.1
$\theta_1$	0.1	0.1	0.1
$\theta_2$	0.1	0.1	0.1
$\theta_3$	0.1	0.1	0.1
$\gamma$	0.2	0.2	0.2
$\epsilon$	0.3	0.3	0.3
$p$	0.5	0.5	0.5
$\rho$	0.6	0.6	0.6
$\beta$	0.1	0.2	0.3

Simulasi numerik dengan memasukkan ketiga asumsi nilai parameter pada Tabel 3 ditunjukkan oleh Gambar 4-6.

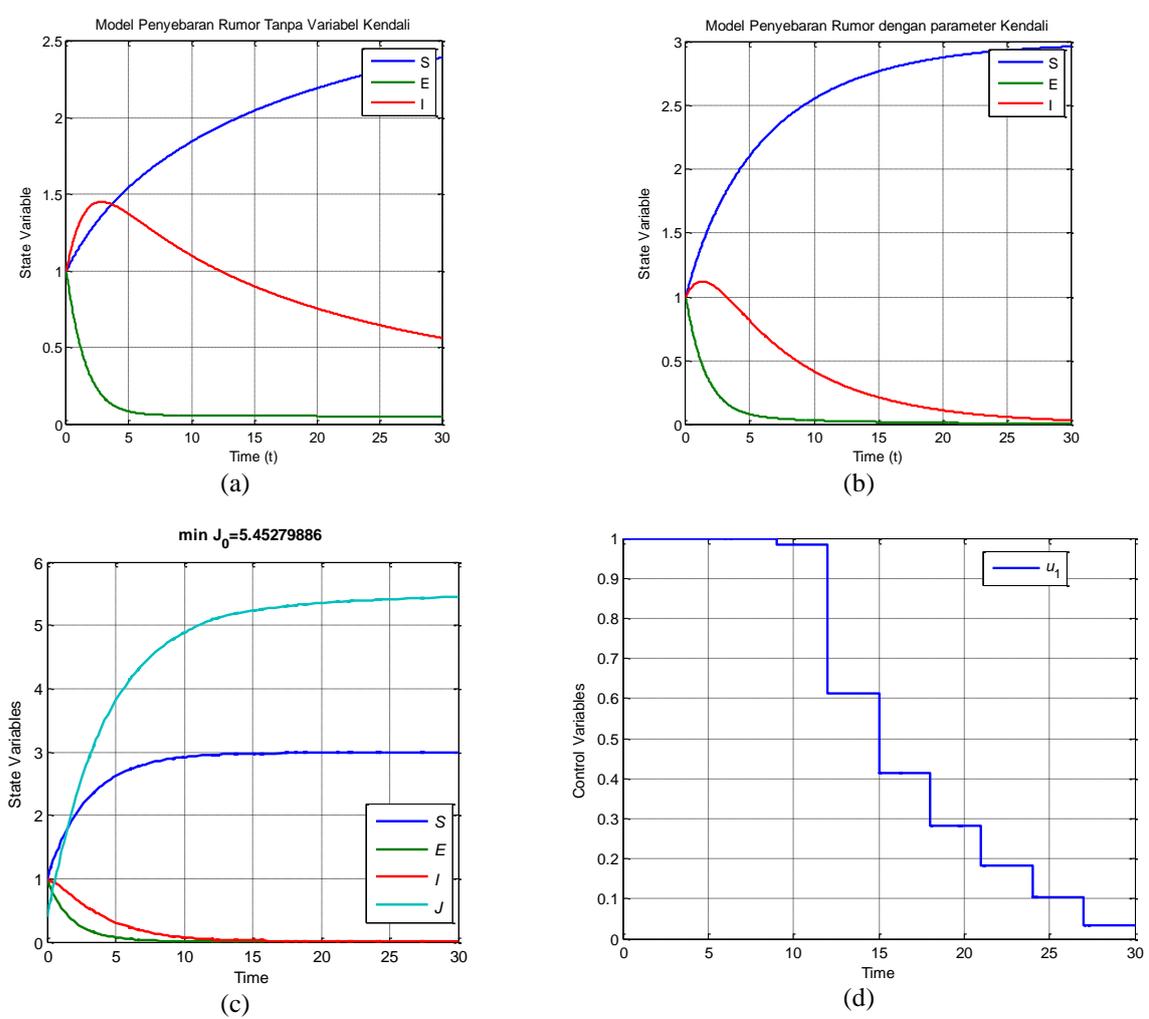


Gambar 4. (a). Profil Model Penyebaran Rumor tanpa Pengendalian; (b). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Parameter Kendali; (c). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Variabel Kendali; (d). Profil Variabel Kendali  $u(t)$ , menggunakan nilai parameter Asumsi 2





Gambar 5. (a). Profil Model Penyebaran Rumor tanpa Pengendalian; (b). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Parameter Kendali; (c). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Variabel Kendali; (d). Profil Variabel Kendali  $u(t)$ , menggunakan nilai parameter Asumsi 3



Gambar 6. (a). Profil Model Penyebaran Rumor tanpa Pengendalian; (b). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Parameter Kendali; (c). Profil Model Penyebaran Rumor dengan Variabel Kendali; (d). Profil Variabel Kendali  $u(t)$ , menggunakan nilai parameter Asumsi 4

Pada Gambar 4-6 terlihat jelas bahwa penerapan Prinsip Pontryagin dalam usaha pengendalian optimal model matematika penyebaran rumor pada jaringan sosial daring dengan menggunakan pernyataan balasan sebagai variabel kendali mampu mengendalikan penyebaran rumor secara signifikan. Hal ini dibuktikan dengan semakin menurunnya jumlah kelompok *adopter* dan *thinker* seiring dengan bertambahnya jumlah kelompok *non-adopter* terjadi dalam waktu lebih cepat jika dibandingkan dengan hasil pengendalian saat pernyataan balasan dijadikan sebagai parameter kendali.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan upaya pengendalian optimal terhadap model matematika penyebaran rumor pada jaringan sosial daring dengan menggunakan pernyataan balasan, maka dapat disimpulkan bahwa penerapan prinsip Pontryagin dapat mengoptimalkan dalam meminimalisir jumlah kelompok *adopter*. Sesuai dengan nilai asumsi tiap parameter yang diberikan, penurunan jumlah *adopter* terjadi secara signifikan dengan biaya pengendalian yang minimum dengan nilai dari performa index  $J = 2.94960202$ . Sehingga, dengan adanya pernyataan balasan yang dijadikan sebagai variabel kendali dalam penerapan teori kendali berbasis Prinsip Pontryagin, maka penyebaran rumor pada jaringan sosial daring dapat dikendalikan dengan baik.

Pada penelitian ini, model matematika penyebaran rumor pada jaringan sosial daring diasumsikan berada pada lingkungan yang homogen. Sehingga bisa dimungkinkan dilakukan penelitian lebih lanjut dengan mengasumsikan lingkungan yang digunakan adalah lingkungan yang heterogen, penambahan waktu tunda, dsb.

#### 5. UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih kami sampaikan kepada Politeknik Negeri Malang atas dana DIPA untuk skema penelitian regular yang telah diberikan. Sehingga hasil penelitian ini dapat didiseminasikan dan dipublikasikan sebagai salah satu luaran laporan penelitian. Dan juga kami ucapkan terimakasih kepada semua pihak yang tidak bisa kami sebutkan satu persatu, yang turut serta memberikan dukungannya sehingga penulisan artikel penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Saran dan kritik yang membangun kami harapkan dari para pembaca.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] William Ogilvy Kermack and A.G. McKendrick, 'A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics', in *Proceedings of The Royal Society A*, London, 1927, vol. 115, pp. 700–721.
- [2] Wang Hui, Han Jiang-Hong, Deng Lin, and Cheng Ke-Qing, 'Dynamics of Rumor Spreading in Mobile Social Networks', *Acta Phys. Sin*, vol. 62, no. 11, p. 110505, 2013.
- [3] G. Y.R and X. L.L, *Acta Phys Sin*, vol. 61, no. 23, pp. 514–518, 2012.
- [4] J. Dhar, A. Jain, and V. K. Gupta, 'A Mathematical Model of News Propagation on Online Social Network and A Control Strategy for Rumor Spreading', *Soc Netw Anal Min Springer*, vol. 6, no. 57, pp. 1–9, 2016.
- [5] Arumugham, V., V. "Optimal Control of Information in Social Network Using Pontryagin's Maximum/Minimum Principle", Thesis, Faculty of Engineering University of Malaya Kuala Lumpur, 2018.
- [6] Xinyan Wang, Xiaoming Wang, Jiehang Xie, Pengfei Wan. 'Optimal Control of The Adversarial Information Propagation in Online Social Networks' in the book series *Lecture Notes in Electrical Engineering (LNEE)*. J. J. Park et al. (Eds.): MUE 2019/FutureTech 2019, LNEE 590, pp. 325–331, 2020.
- [7] L. Zhu, X. Zhou and Y. Li, Global dynamics analysis and control of a rumor spreading model in online social networks, *Physica A* (2019)
- [8] Jecky Eko Prasetyo, 2018, **Analisis dan Kontrol Optimal Model Penyebaran Rumor dengan Adanya Kampanye Anti Hoax**, skripsi ini dibimbing oleh Dr. Miswanto, M. Si dan Dr. Fatmawati, M. Si, Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.
- [9] Y. Wu, H. Huang, J. Zhao, C. Wang and T. Wang, "Using Mobile Nodes to Control Rumors in Big Data Based on a New Rumor Propagation Model in Vehicular Social Networks," in *IEEE Access*, vol. 6, pp. 62612–62621, 2018.
- [10] Huo, L., Li Wang, Xiaomin Zhao, "Stability Analysis and Optimal Control of a Rumor Spreading Model with Media Report", *Physica A*. 517 (2019), pp. 551–562
- [11] Zhu, L., Mengxue Liu, Yimin Li. "The Dynamics Analysis of a Rumor Propagation Model in Online Social Network", *Physica A*. 520 (2019), pp 118–137
- [12] Jain, A., Dhar, J. & Gupta, V.K. *Differ Equ Dyn Syst* (2019). "Optimal Control of Rumor Spreading Model on Homogeneous Social Network with Consideration of Influence Delay of Thinkers"
- [13] Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. New York: CRC Press.
- [14] W. Ningsih, Subchan and H. Nurhadi, "Design and analysis of motion control system in the fin and the propulsion system of the Autonomous Underwater Vehicle (AUV) using Cross Coupled Control," 2015 International Conference

- on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA), Surabaya, 2015, pp. 137-142.
- [15] Sethi, S.P., Thompson, G.L.(2000) "Optimal Control Theory Application to Management Science and Economics Second Edition". USA : Springer
- [16] Hirmajer, T., Balsa-Canto, E., Banga, J.R. *DOTcvpSB a Software Toolbox for Dynamic Optimization in System Biology*. BMC Bioinformatics, 2009, 10:199, pp.1-14.
- [17] Hirmajer, T., Balsa Canto, E., Fikar, M., Banga, J.R., Technical Report DOTcvp : Dynamic Optimization Toolbox with Control Vector Parameterization approach. 2008. <https://www.researchgate.net/publication/228552084>