

Pemodelan Dan Simulasi Aliran Fluida Pada Permukaan Tanah Dari Satu Pompa Menggunakan Metoda Elemen Hingga

Kamiran
Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. AriefRahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: kamiran@matematika.its.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019
Direvisi: 18 November 2019
Diterbitkan: 15 Januari 2020

Kata Kunci:

Aliran fluida pada Permukaan tanah datar
Persamaan Navier -Stokes dan Metoda Elemen Hingga

ABSTRAK

Aliran fluida merupakan fenomena alam yang sangat menarik untuk dijadikan objek penelitian. Dalam skala makroskopis, dinamika fluida dapat dijelaskan dengan persamaan Navier-Stokes[1]. Persamaan Navier-Stokes merupakan serangkaian persamaan terkopel yang menjelaskan pergerakan suatu fluida baik cairan maupun gas. Persamaan-persamaan ini menyatakan bahwa perubahan momentum partikel-partikel fluida bergantung pada gaya gesekan (viskositas) yang bekerja pada fluida. Selanjutnya akan digunakan persamaan-persamaan tersebut pada aliran fluida pada permukaan tanah akibat dari pemompaan sebuah sumur dengan menggunakan satu pompa yang kemudian di tumpahkan kepermukaan disetar sumur tersebut.

Dalam penelitian ini, pendekatan numerik yang digunakan adalah metode elemen hingga. Metode elemen hingga merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial pada persoalan-persoalan ilmu rekayasa atau matematika terapan seperti perpindahan panas, analisis struktur baja dan lain lain. Dalam kasus ini akan digunakan pada aliran fluida pada suatu dataran akibat tumpahan fluida dari satu sumur pompa. Prosedur utama dari metode elemen hingga adalah membagi domain yang kompleks menjadi elemen-elemen kecil agar lebih mudah untuk mendapatkan solusinya, kemudian Solusi dari tiap elemen digabungkan kembali menjadi solusi seluruh domain. Dan selanjutnya bentuk dari kecepatan aliran fluida pada permukaan untuk seluruh domain dapat disimulasikan dan dicermati menggunakan bantuan software MATLAB.

Copyright © 2019 SIMANIS.
All rights reserved.

Korespondensi:

Kamiran,
Jurusan Matematika,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. AriefRahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: kamiran@matematika.its.ac.id

1. PENDAHULUAN

Aliran fluida merupakan fenomena alam yang sering diamati dan digunakan sebagai objek penelitian. Contohnya; Aliran angin di atmosfer, aliran air di sungai, aliran lahar pada letusan gunung berapi, pergerakan awan dan asap yang membentuk suatu pola adalah beberapa aliran fluida yang dapat diamati secara makroskopis. Sedangkan aliran darah dalam pembuluh merupakan aliran fluida yang teramati dalam skala mikroskopis.

Dalam skala makroskopis, dinamika fluida dapat dijelaskan dengan persamaan Navier-Stokes[1]. Persamaan Navier-Stokes merupakan serangkaian persamaan terkopel yang menjelaskan pergerakan suatu fluida baik cairan maupun gas. Persamaan-persamaan ini menyatakan bahwa perubahan momentum partikel-

partikel fluida bergantung pada gaya gesekan (viskositas) yang bekerja pada fluida. Dengan kata lain persamaan Navier-Stokes menjelaskan kesetimbangan gaya-gaya yang bekerja pada fluida.

Persamaan Navier-Stokes merupakan persamaan diferensial parsial non-linier yang kompleks. Keadaan ini menyebabkan penyelesaian persamaan tersebut tidak dapat dilakukan secara analitik. Oleh karena itu, perlu dilakukan pendekatan numerik untuk menyelesaikannya[2]. [3] menjelaskan beberapa pendekatan numerik yang dilakukan selama ini antara lain menggunakan metode beda hingga, elemen hingga, volume hingga, Lattice Gas Automata (LGA), Lattice Boltzmann Method (LBM), Cellular Automata (CA), dan sebagainya. Chen dan Zhang memodelkan secara numerik reservoir anisotropi, dinding horisontal, dan aliran multifase dengan memperhitungkan gaya gravitasi dan faktor lapisan. Dalam penelitiannya, [3] menggunakan beberapa metode, yaitu beda hingga, volume hingga, dan beda hingga campuran. Hasil penelitian tersebut dapat memodelkan beberapa parameter dalam sistem reservoir sumur. Dalam makalah ini, pendekatan numerik yang dilakukan menggunakan metode elemen hingga.

Metode elemen hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada permasalahan ilmu rekayasa dan matematika fisik seperti perpindahan panas, analisis struktur, aliran fluida, transportasi massa dan potensial elektromagnetik. Proses dari metode elemen hingga adalah membagi masalah yang kompleks menjadi elemen-elemen agar lebih mudah mendapatkan solusi. Solusi dari tiap elemen kemudian digabungkan sehingga menjadi solusi masalah secara keseluruhan. Dan hasilnya akan disimulasikan menggunakan software MATLAB.

2. METODE PENELITIAN

A. Model Aliran Fluida

Model Aliran Fluida 2 Dimensi pada Kasus Aliran fluida pada Permukaan tanah dari pemompaan satu pompa terhadap Suatu Sumur adalah ;

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

dengan:

ρ = Kerapatan Fluida

μ = Gaya viskositas

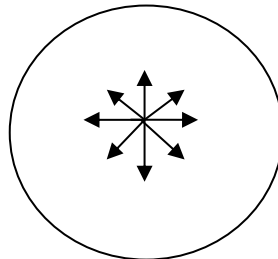
V = Kecepatan gerak fluida

B. Penyelesaian Model Aliran Dengan Metode Elemen Hingga.

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan adalah menggunakan formulasi elemen hingga.. Metode ini menggunakan pendekatan terhadap harga-harga yang tidak diketahui pada setiap titik secara diskrit. Kemudian domain model yang berupa lingkaran dipartisi dalam bagian yang lebih kecil yang secara keseluruhan masih memiliki sifat sama dengan benda yang utuh sebelum terbagi dalam bagian yang kecil (diskritisasi).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kecepatan aliran yang terjadi pada aliran permukaan tanah datar yang dikaji adalah aliran permukaan pada suatu permukaan tanah yang diasumsikan akan menyebar secara melingkar menjauhi titik sembur tempat pompa yang memompa sumur sebagai sumber aliran yang memiliki kontur berbentuk lingkaran dengan Jari-jari 100 seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 1.

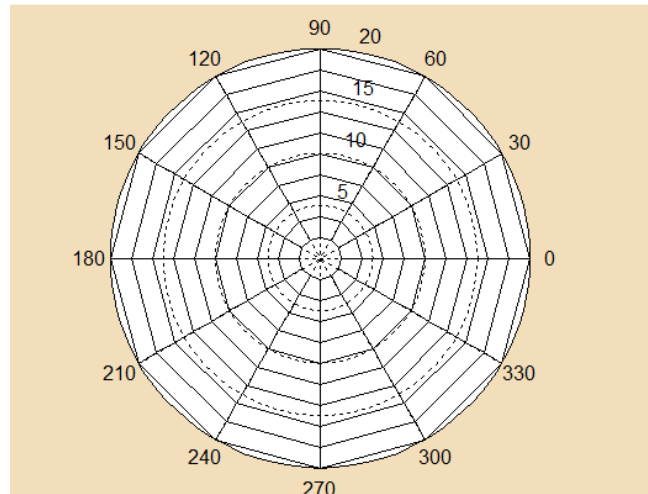


Gambar 1. Aliran permukaan tanah datar

Kondisi batas yang diberikan pada aliran permukaan tanah datar yang ditunjukkan oleh Gambar1 diatas adalah dengan $\rho = 1000$ dan $\mu = 40$ dan pusat lingkaran adalah merupakan pusat semburan aliran fluida. Model Aliran Fluida 2 Dimensi pada Kasus Aliran Permukaan tanah datar adalah :

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Selanjutnya domain permukaan tanah yang dikaji didiskritisasikan menjadi 120 elemen dengan 81 node seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.



Gambar 2. Diskritisasi domain pada aliran permukaan.

Kemudian Fungsi bentuk aproksimasi yang digunakan adalah fungsi interpolasi elemen segiempat linier yang dinyatakan sebagai berikut ; $V = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4xy$

Fungsi bentuk untuk elemen segiempat linier diatas dapat dinyatakan dalam bentuk ;

$$V = N_iV_1 + N_jV_2 + N_kV_3 + N_mV_4$$

$$= [N_i \quad N_j \quad N_k \quad N_m] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$$= [N]\{V_n\}$$

dimana

$$\begin{cases} N_i = \left(1 - \frac{x}{2b}\right)\left(1 - \frac{y}{2a}\right) \\ N_j = \frac{x}{2b}\left(1 - \frac{y}{2a}\right) \\ N_k = \frac{xy}{4ab} \\ N_m = \frac{y}{2a}\left(1 - \frac{x}{2b}\right) \end{cases}$$

Governing equation persamaan (1) dihitung dengan menggunakan pendekatan residu berbobot (*weighted residue*) dan Formulasi Galerkin, Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut ;

$$\begin{aligned} \int_A [N]^T \left(\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) dA = 0 \\ \int_A [N]^T \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} dA + \int_A [N]^T \rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} dA - \int_A [N]^T \rho \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} dA + \\ \int_A [N]^T \rho \frac{\partial V}{\partial y} dA - \int_A [N]^T \mu \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} dA + \int_A [N]^T \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dA = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Suku ketiga dan kelima dari Persamaan di atas merupakan persamaan derivative tingkat dua yang harus disederhanakan menjadi persamaan derivative tingkat satu dengan menggunakan Teorema Green. Sehingga diperoleh

$$\int_A \left(\frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy = \int_A \frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial V}{\partial x} dA - \int_T N^T \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta dT \quad (3)$$

$$\int_A \left(\frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy = \int_A \frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial V}{\partial y} dA - \int_T N^T \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta dT' \quad (4)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (3) dan (4) ke Persamaan (2), sehingga persamaannya menjadi:

$$\int_A \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V^{(e)} N^T \frac{\partial N}{\partial x} + V^{(e)} N^T \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy - \mu \left(\frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial [N]V^{(e)}}{\partial x} - N^T \frac{\partial [N]V^{(e)}}{\partial x} \cos \theta dT' - \frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial [N]V^{(e)}}{\partial y} + N^T \frac{\partial [N]V^{(e)}}{\partial x} \sin \theta dT' \right) dx dy$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sederhana sebagai berikut :

$$[k_1]\{\dot{V}\} + [k_2]\{V\} = \{f\}$$

Dengan ;

$$[k_1] = \int_A [N]^T [N] dA$$

$$[k_A] = \int_A \rho \left(\frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) [N]^T dA$$

$$[k_B] = \int_A \mu \left(\frac{\partial [N]}{\partial x} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} + \frac{\partial [N]}{\partial y} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \right) dA$$

$$[k_2] = [k_A] + [k_B]$$

$$\{f\} = \int_S [N]^T V dS$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan matriks kekakuan $[k_1^{(e)}]$, $[k_A^{(e)}]$, $[k_B^{(e)}]$ dan vektor $\{f^{(e)}\}$ sebagai berikut ;

Setelah melakukan integrasi didapat matriks kekakuan sbb ;

$$[k_1^{(e)}] = \frac{A}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k_A^{(e)}] = \rho \begin{bmatrix} -\frac{a}{3} - \frac{b}{3} & \frac{a}{3} - \frac{b}{2} & \frac{a}{2} + \frac{b}{2} & -\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \\ \frac{2a}{3} - \frac{b}{12} & -\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} & \frac{a}{6} - \frac{3b}{4} & -\frac{a}{6} + \frac{b}{12} \\ \frac{5a}{6} - \frac{b}{6} & -\frac{5a}{6} - \frac{b}{3} & \frac{a}{3} + \frac{b}{3} & -\frac{a}{3} + \frac{b}{6} \\ -\frac{4a}{3} - \frac{b}{3} & \frac{4a}{3} - \frac{b}{6} & \frac{b}{6} & \frac{b}{3} \end{bmatrix}$$

$$[k_B^{(e)}] = \frac{a\mu}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{b\mu}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k_2^{(e)}] = \rho \begin{bmatrix} -\frac{a}{3} - \frac{b}{3} & \frac{a}{3} - \frac{b}{2} & \frac{a}{2} + \frac{b}{2} & -\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \\ \frac{2a}{3} - \frac{b}{12} & -\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} & \frac{a}{6} - \frac{3b}{4} & -\frac{a}{6} + \frac{b}{12} \\ \frac{5a}{6} - \frac{b}{6} & -\frac{5a}{6} - \frac{b}{3} & \frac{a}{3} + \frac{b}{3} & -\frac{a}{3} + \frac{b}{6} \\ -\frac{4a}{3} - \frac{b}{3} & \frac{4a}{3} - \frac{b}{6} & \frac{b}{6} & \frac{b}{3} \end{bmatrix} + \frac{a\mu}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{b\mu}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{-b}^b V \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} dq$$

Sehingga diperoleh

$$\{f\} = \frac{vL_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{vL_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{vL_{km}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{vL_{im}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Selanjutnya dilakukan Post Process Hasil sebagai berikut ;
Persamaan awal:

$$\{\dot{V}\}(t) = \frac{\{V\}(t+\Delta t) - \{V\}(t)}{\Delta t}$$

Sehingga persamaan awal menjadi:

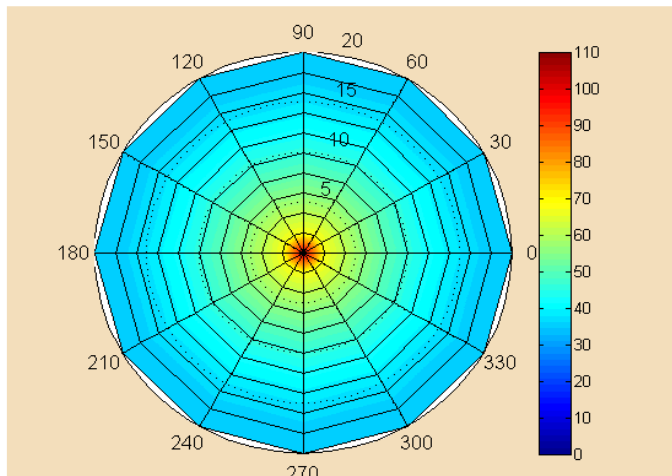
$$\{V\}(t + \Delta t) = [k_1]^{-1}\{f\}\Delta t - [k_1]^{-1}[k_2]\{V\}(t)\Delta t + \{V\}(t)$$

Selanjutnya secara keseluruhan hasil perhitungan diatas dilakukan dengan pemrograman matlab sehingga didapat hasil simulasinya.

4. KESIMPULAN

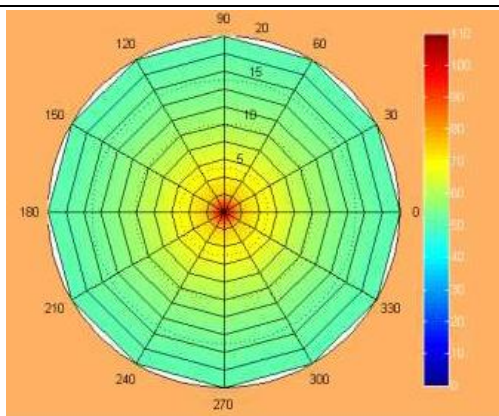
Pada saat $t = 30$ sebagai awal dari kecepatan aliran permukaan tanah akan terlihat pada grafik simulasi dengan warna merah (terang) yang menunjukkan kecepatan awal yang tinggi, yakni sebesar 100 m/dt. lalu aliran bergerak menyebar melingkar dengan kecepatan yang lebih lambat dan ditunjukkan dalam simulasi dengan warna yang lebih gelap, berikut adalah hasil perhitungan yang dinyatakan dalam bentuk simulasi kecepatan aliran secara keseluruhan.

Hasil Simulasi setelah 30 dt pertama.



Selanjutnya perubahan kecepatan aliran dapat dilakukan pada pengamatan untuk waktu $t = 100$, maka akan terlihat penyebaran kecepatan aliran cenderung akan mempunyai kecepatan yang meningkat, hal ini menunjukkan bahwa kecepatan aliran pada permukaan yang berada ditepi bagian luar tidak mengalami hambatan, sehingga mengalami peningkatan kecepatan aliran secara signifikan. berikut adalah hasil perhitungan yang dinyatakan dalam bentuk simulasi kecepatan aliran keseluruhan.

Hasil Simulasi setelah 100 dt berikutnya.



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Guo, Y. (2006). Boltzmann diffusive limit beyond the Navier-Stokes approximation. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 59(5), 626-687.
- [2] Batty, C., & Bridson, R. (2010). A Variational Finite Difference Method for Time-Dependent Stokes Flow on Irregular Domains. CoRR.
- [3] Chen, W. L., Wang, G. M., & Zhang, C. X. (2009). Bandwidth enhancement of a microstrip-line-fed printed wide-slot antenna with a fractal-shaped slot. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57(7), 2176-2179.