

Penyelesaian Numerik Model Ayunan Terpaksa Menggunakan Metode *Exponential Time Differencing* (ETD) dan Karakteristik Dinamika

Halim Hamadi¹, Fahrudin Nugroho¹

¹Program Studi Ilmu Fisika, Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada
Jurusan Fisika Universitas Gadjah Mada Bulaksumur BLS 21, Yogyakarta 55281
E-mail : halim.hamadi@mail.ugm.ac.id¹, fakhrud@ugm.ac.id¹,

Abstrak

Salah satu model yang banyak dijumpai dalam fisika adalah gerak osilasi. Model matematis yang mewakili gerak osilasi berupa persamaan diferensial orde-2 terhadap waktu. Salah satu gerak osilasi adalah sistem ayunan. Ada dua jenis osilasi dalam sistem ayunan yaitu gerak harmonik dan gerak terpaksa. Model osilasi yang diselesaikan dalam penelitian ini menggunakan model ayunan terpaksa (*driven pendulum*) yang menghasilkan gerak osilasi terpaksa dan dinamika gerak sistem dipengaruhi oleh gaya luar. Persamaan diferensial model *driven pendulum* merupakan salah satu persamaan diferensial sistem stiff. Penyelesaian model *driven pendulum* menggunakan metode *exponential time differencing* (ETD). Karakteristik dinamika gerak model *driven pendulum* menggunakan metode *autocorrelation function* dan *power spectrum*. Selain itu, karakteristik dinamika model *driven pendulum* dapat dilihat dari grafik ruang fase yang dihasilkan.

Kata kunci : osilasi, *driven pendulum*, ETD, karakteristik dinamika, persamaan diferensial.

1. Pendahuluan

Sistem ayunan (*pendulum*) sederhana menunjukkan salah satu dinamika gerak osilasi yang mendasar dan banyak dijumpai dalam fisika. *Pendulum* terdiri dari batang dengan panjang l dengan titik massa sebesar m terpasang di bagian bawah batang. Apabila massa m disimpangkan sebesar ϕ dari titik keseimbangan, maka menurut hukum II Newton tentang persamaan gerak, persamaan dinamika gerak diperoleh [1]

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0, \quad (1)$$

disebut sebagai persamaan gerakan harmonik sederhana, dengan ϕ adalah sudut simpangan dan g adalah percepatan gravitasi. Jika pada (1) terdapat suku redaman dan dinamika gerak osilasi dipengaruhi oleh gaya luar, maka (1) termodifikasi menjadi

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \alpha \frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\phi = A \sin(\omega t), \quad (2)$$

Dalam (2) terdapat tetapan redaman yaitu α dan suku gaya paksa, $A \sin(\omega t)$, yang mempengaruhi dinamika gerak *pendulum*. Fungsi gaya paksa ruas kanan persamaan (2) mempunyai nilai amplitudo A dan frekuensi sudut ω . Dinamika model sistem dari persamaan (2) dipengaruhi oleh nilai tetapan

redaman, amplitudo gaya paksa, serta frekuensi gaya paksa yang diberikan ke sistem.

Dalam dunia fisika, banyak sistem yang mempunyai kemiripan dengan sistem *driven pendulum*, seperti pada bidang superkonduktor yaitu model Josephson *junction*[2], bidang laser yaitu model laser-gyroscope[3], bidang sirkuit elektronik yaitu *Phase-Locked Loop*[4], dan dalam bidang fisika yang lain yang mana persamaan model sistem tersebut dapat dianalogikan seperti model sistem pendulum dalam persamaan (2).

Salah satu cara untuk mengetahui dinamika sistem *pendulum* adalah menyelesaikan persamaan (2) dengan pendekatan numerik. Jika persamaan (2) merupakan salah satu persamaan diferensial sistem *stiff* maka penyelesaian persamaan diferensial membutuhkan metode khusus supaya hasil yang diperoleh akurat dan cepat. Salah metode numerik dalam menyelesaikan diferensial sistem *stiff* adalah metode *Exponential Time Differencing* (ETD) [5].

2. Pembahasan

2.1. Metode Komputasi

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (2) adalah metode ETD. Metode ETD dapat memberikan hasil yang akurat dan cepat serta memiliki nilai ralat kecil [5]. Metode numerik lain seperti Euler dan Runge-Kutta (RK) digunakan dalam membandingkan hasil

penyelesaian persamaan diferensial menggunakan ETD.

Secara umum persamaan diferensial orde-1 dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x), \quad (3)$$

dimana p dan q adalah fungsi-fungsi yang kontinu. Metode ETD orde-1 atau disebut juga dengan ETD1 diberikan oleh persamaan:

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + F_n \frac{(e^{ch} - 1)}{c}, \quad (4)$$

mempunyai ralat pemotongan sebesar $h^2 \dot{F}/2$. Metode ETD menggunakan faktor integrasi yaitu e^{ch} dalam penyelesaian persamaan diferensial. Faktor integrasi adalah faktor yang mana jika dikalikan dengan fungsi diferensial maka fungsi tersebut akan dapat diintegrasikan [6]. Persamaan diferensial dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d\phi}{dt} = v, \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = a, \quad (6)$$

Jika (5) dan (6) disubstitusikan ke dalam (2) maka diperoleh persamaan baru yang sudah termodifikasi menjadi persamaan diferensial orde-1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \alpha v + \frac{g}{l} \sin \phi &= A \sin(\omega t) \\ \frac{dv}{dt} &= -\alpha v - \frac{g}{l} \sin \phi + A \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (7)$$

Penyelesaian (2) menjadi 2 persamaan diferensial orde-1 yang saling terkait. Fungsi ϕ dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (5).

Jika metode ETD1 pada persamaan (4) diimplementasikan ke dalam persamaan (7) maka akan diperoleh [5]

$$\phi_{n+1} = \phi_n e^{-\alpha h} + F_n \frac{(e^{-\alpha h} - 1)}{\alpha} \rightarrow n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

yang mana fungsi F_n didefinisikan sebagai

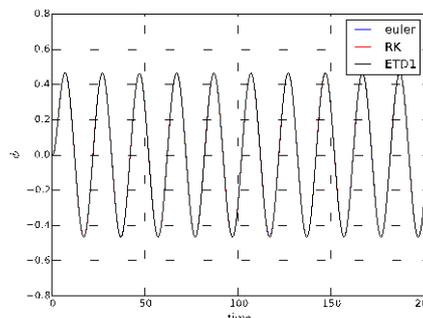
$$F_n = -c \sin \phi_n + A \sin(\omega t_n) \quad (9)$$

Hasil dinamika sistem diperoleh dengan mengubah nilai tetapan-tetapan dalam persamaan (2). Amplitudo dan frekuensi gaya paksa diubah sehingga dapat dianalisis dinamika sistem *driven pendulum*. Metode analisa dinamika sistem menggunakan metode *autocorrelation*, *power spectrum*, dan diagram ruang fase [7]. Dari hasil

analisa tersebut, dinamika sistem dapat dikelompokkan ke dalam dinamika teratur (*order*) atau tidak teratur (*disorder*).

2.2. Hasil

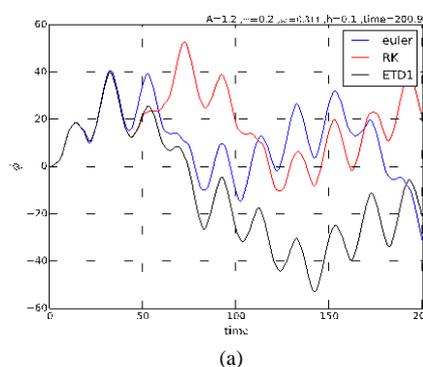
Hasil penerapan metode ETD1, Euler, dan metode RK untuk persamaan sistem driven pendulum dapat dilihat pada Gambar 1 sebagai berikut:

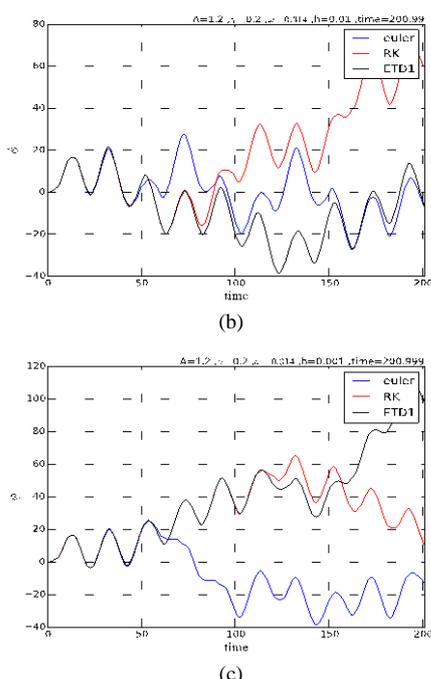


Gambar 1. Grafik penyelesaian persamaan (2) dengan pendekatan numerik menggunakan metode ETD1, RK, dan Euler. Langkah waktu $h=0.01$, nilai awal $\phi=0.0$, waktu maksimum $t_{\max} = 200$.

Gambar 1 menunjukkan bahwa ketiga metode (ETD1, RK, Euler) yang diujikan dapat menyelesaikan persamaan (2) dengan pendekatan secara numerik. Hasil penyelesaian persamaan (2) menggunakan nilai amplitudo gaya paksa sebesar $A=0.5$, nilai frekuensi gaya paksa $\omega=0.314$, dan nilai tetapan redaman $\gamma=2.0$. Metode ETD1 dapat digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial. Hal ini ditunjukkan oleh Gambar 1 yang mana hasil penyelesaian ETD1 sesuai dengan hasil penyelesaian metode RK dan Euler.

Saat nilai amplitudo dan frekuensi pada gaya paksa kecil, dinamika sistem belum menunjukkan adanya dinamika teratur (*order*). Makna dari dinamika *order* dalam kasus ini bahwa sistem *driven pendulum* berosilasi secara stabil. Jika amplitudo gaya paksa diperbesar menjadi $A=1.2$ dan nilai dari tetapan redaman diperkecil menjadi $\gamma=0.2$ maka dinamika sistem *driven pendulum* menjadi tidak teratur. Hal ini dapat ditunjukkan pada Gambar 2



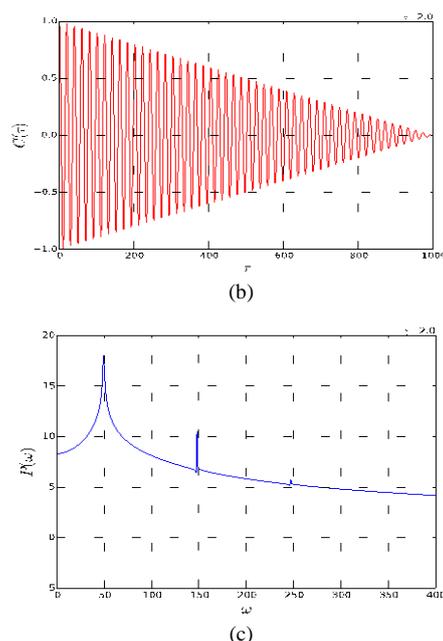
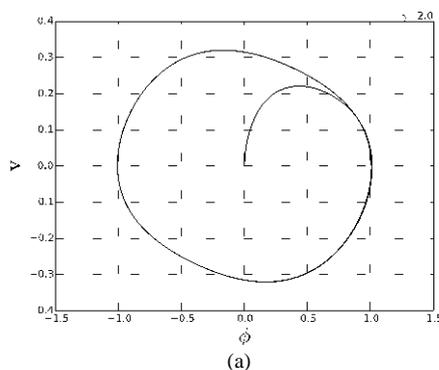


Gambar 2. Grafik penyelesaian (2) menggunakan metode ETD1, RK, dan Euler yang merupakan dinamika tidak teratur untuk beberapa langkah waktu h . (a) langkah waktu $h=0.1$, (b) langkah waktu $h=0.01$, dan (c) langkah waktu $h=0.001$.

Dinamika tidak teratur pada Gambar 2 ditunjukkan oleh ketidakstabilan nilai amplitudo. Nilai amplitudo gelombang bernilai berbeda-beda dibandingkan nilai amplitudo pada Gambar 1. Dinamika pada Gambar 2 juga berbeda untuk setiap metode dan setiap perubahan langkah waktu yang diberikan.

Dinamika tidak teratur pada sistem *driven pendulum* dapat diselidiki melalui perubahan-perubahan pada tetapan gaya paksa dan dimungkinkan perubahan pada tetapan redaman. Klasifikasi dinamika tersebut tidak teratur atau *order* menggunakan metode *autocorrelation* dan metode *power spectrum*.

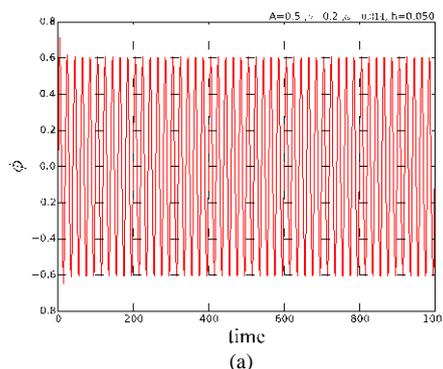
Hasil analisa untuk dinamika *order* pada sistem *driven pendulum* ditunjukkan oleh Gambar 3 berikut ini

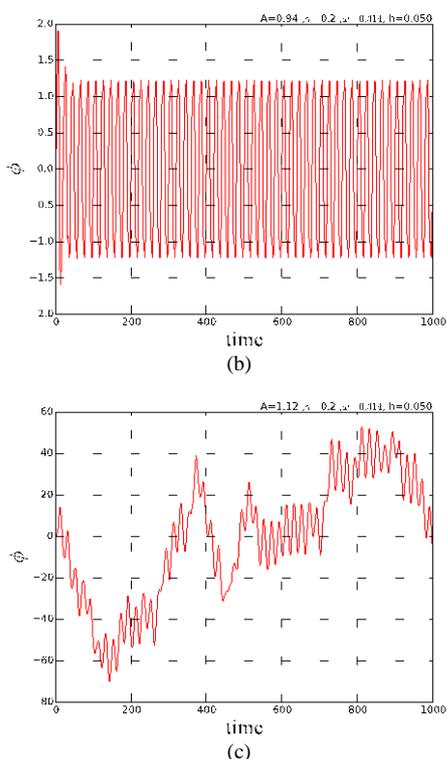


Gambar 3. Grafik analisa dinamika *order* sistem *driven pendulum* menggunakan pendekatan numerik metode ETD 1. (a) grafik lintasan ruang fase, (b) grafik analisa menggunakan *autocorrelation function*, (c) grafik analisa *power spectrum*.

2.2.1. Perubahan amplitudo (A) gaya paksa

Jika amplitudo gaya paksa persamaan (2) diubah sedangkan frekuensi gaya paksa dan tetapan redaman dibuat tetap maka dapat diperoleh daerah yang mana daerah tersebut merupakan daerah tidak teratur. Nilai frekuensi gaya paksa pada penelitian adalah $\omega = 0.314$ sedangkan nilai tetapan redamannya $\gamma = 0.2$. Hasil penyelesaian persamaan (2) menggunakan pendekatan metode ETD1 untuk perubahan amplitudo gaya paksa adalah sebagai berikut.



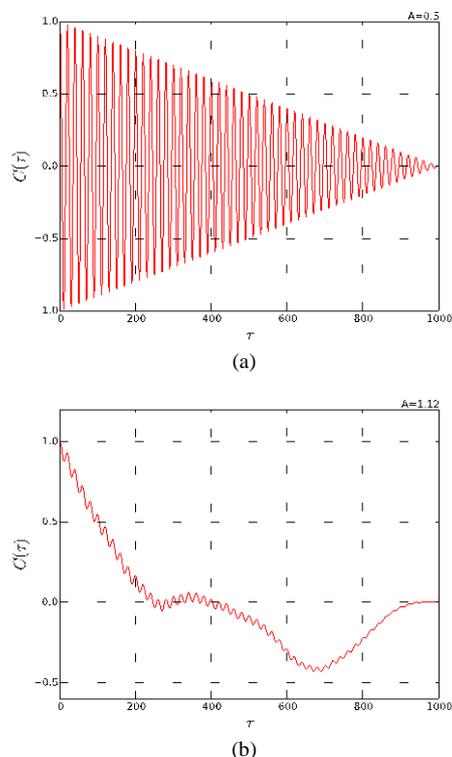


Gambar 4. Grafik dinamika sistem *driven pendulum* menggunakan pendekatan numerik metode ETD 1 untuk setiap perubahan amplitudo (A) gaya paksa dengan nilai tetapan redaman $\gamma=0.2$ dan nilai frekuensi gaya paksa $\omega=0.314$. (a) dinamika sistem *driven pendulum* untuk $A=0.5$, (b) $A=0.94$, dan (c) $A=1.12$.

Gambar 4 menunjukkan dinamika dari penyelesaian persamaan (2) untuk nilai amplitudo gaya paksa yang berbeda sedangkan tetapan redaman ($\gamma=0.2$) dan nilai frekuensi gaya paksa ($\omega=0.314$) dibuat tetap. Saat nilai amplitudo $A=0.1$, pada Gambar 4.a dinamika yang terjadi masih teratur (*order*) karena dapat terlihat dari hasil amplitudo yang bernilai stabil. Amplitudo yang nilainya lebih besar dari 0.95 ($A > 0.95$), dinamika yang terjadi menunjukan dinamika tidak teratur. dinamika tidak teratur tersebut ditunjukkan oleh Gambar 4.c dan 4.d dimana nilai amplitudo gelombang tidak stabil. Pada nilai amplitudo $A=0.94$ merupakan daerah kritis. Daerah tersebut memisahkan antara nilai amplitudo yang dapat membuat dinamika sistem *driven pendulum* dari teratur menjadi tidak teratur.

Karakteristik dinamika tidak teratur pada suatu sistem dapat menggunakan analisis *autocorrelation function* dan *power spectrum* selain menggunakan analisis dari hasilnya sinyal langsung yang dihasilkan [7]. Selain ketiga metode analisa diatas, karakteristik dinamika dapat menggunakan metode grafik lintasan

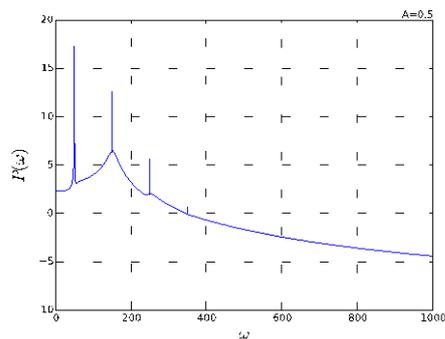
dalam diagram fase. Gambar 5 merupakan karakteristik dinamika sistem *driven pendulum* menggunakan analisa *autocorrelation function* untuk beberapa variasi nilai amplitudo gaya paksa.



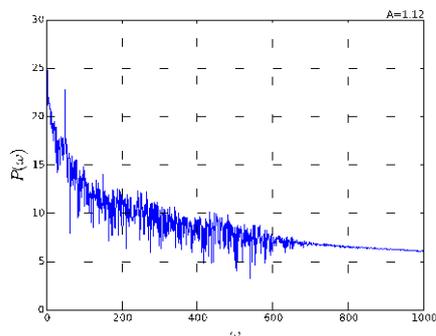
Gambar 5. Grafik autocorrelation function penyelesaian persamaan (2) untuk variasi amplitudo gaya paksa. (a) $A=0.5$, (b) $A=1.12$.

Dari Gambar 5 diperoleh 2 grafik untuk masing-masing nilai amplitudo gaya paksa yang berbeda. Saat nilai $A=0.5$, grafik yang diperoleh menunjukkan nilai kestabilan. Gambar 5.a merupakan grafik hasil *autocorrelation* untuk sistem dengan dinamika teratur. Pada gambar 5.b diperoleh grafik eksponensial yang meluruh (*exponential decay*) menunjukkan jika sistem berada dalam keadaan tidak teratur.

Analisa dinamika sistem *driven pendulum* dapat menggunakan analisa *power spectrum*. Analisa ini membawa set data dari domain waktu ke dalam domain frekuensi [7]. Hasil grafik *power spectrum* yang diperoleh dari hasil penyelesaian persamaan (2) untuk beberapa nilai amplitudo adalah sebagai berikut



(a)

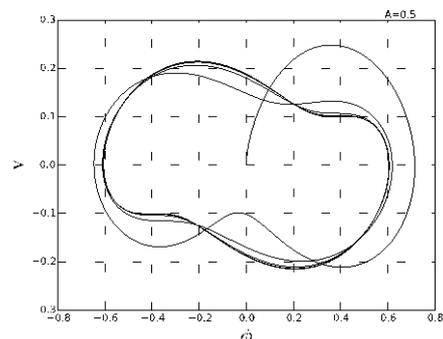


(b)

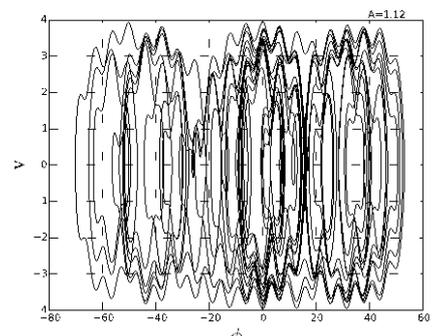
Gambar 6. Grafik power spectrum hasil penyelesaian persamaan (2) untuk beberapa nilai amplitudo gaya paksa. (a) $A=0.5$, (b) $A=1.12$.

Pada Gambar 6.a saat amplitudo $A=0.5$, grafik *power spectrum* menunjukkan beberapa puncak frekuensi yang dominan, dalam kasus ini terdapat 3 puncak yang dominan serta nilai *band noise* kecil, sehingga dapat disimpulkan bahwa saat $A=0.5$ dinamika sistem *driven pendulum* masih dalam dinamika teratur. Sebaliknya, saat nilai $A=1.12$ maka ada banyak puncak frekuensi yang dominan dan nilai *band noise* juga besar, sehingga sulit menentukan frekuensi yang dominan. Konsekuensi dari hasil grafik 6.b adalah dinamika sistem *driven pendulum* mempunyai dinamika tidak teratur.

Karakteristik tidak teratur dapat dilihat dari diagram ruang fase (diagram fase) yang dihasilkan dari penyelesaian persamaan (2). Diagram fase merupakan diagram antara posisi dengan momentum [8]. Diagram fase disajikan dalam Gambar 7 berikut ini



(a)



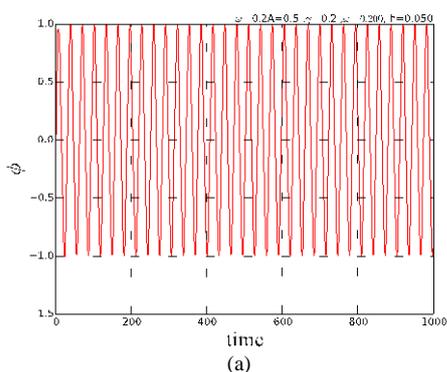
(b)

Gambar 7. Diagram fase hasil penyelesaian persamaan (2). (a) $A=0.5$, (b) $A=1.12$.

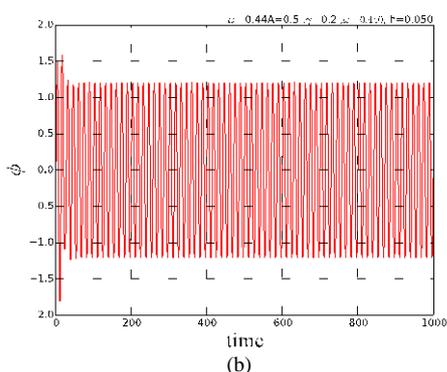
Dari kedua diagram fase Gambar 7 untuk nilai A yang berbeda diperoleh lintasan yang berbeda. Saat nilai $A=0.5$ lintasan Gambar 7.a masih teratur dan stabil. Ketika nilai $A=1.12$ lintasan pada Gambar 7.b terlihat acak dan sudah tidak stabil. Gambar 7.a merupakan dinamika teratur sistem *driven pendulum*, sedangkan Gambar 7.b merupakan dinamika tidak teratur.

2.2.2. Perubahan Frekuensi (ω) gaya paksa

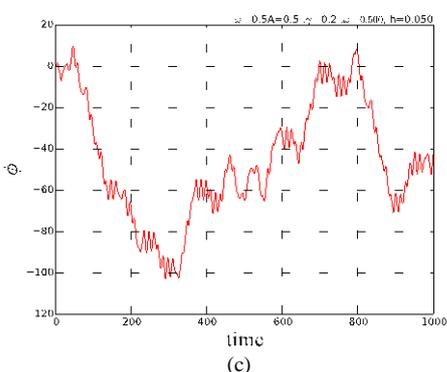
Untuk mengetahui dinamika dalam model sistem *driven pendulum* dapat merubah nilai frekuensi pada gaya paksa dengan nilai A dan γ dibuat tetap. Nilai amplitudo dalam penyelesaian persamaan (2) bernilai $A=0.8$ dan nilai tetapan redaman $\gamma=0.2$. Grafik penyelesaian persamaan (2) menggunakan metode ETD1 disajikan dalam Gambar 8.



(a)



(b)

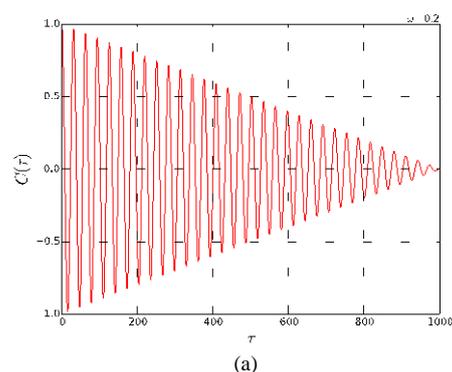


(c)

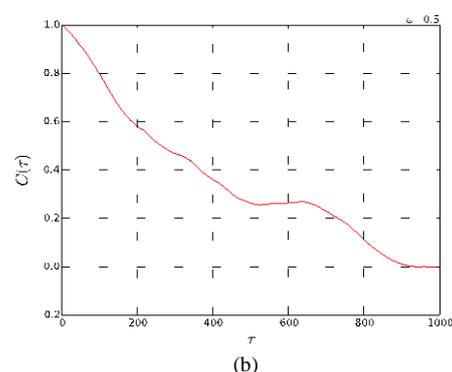
Gambar 8. Grafik dinamika sistem driven pendulum menggunakan pendekatan numerik metode ETD 1 untuk beberapa perubahan frekuensi (ω) gaya paksa. (a) dinamika *order* sistem driven pendulum untuk $\omega = 0.20$, (b) $\omega = 0.44$, (c) dinamika tidak teratur $\omega = 0.5$.

Dari hasil grafik pada Gambar 8, dinamika sistem *driven pendulum* dalam keadaan *order* saat $\omega \leq 0.44$ sedangkan saat $\omega > 0.44$ dinamika sistem dalam kondisi *disorder*. Frekuensi $\omega \approx 0.44$ menjadi daerah kritis, daerah dimana antara dinamika *order* dengan dinamika tidak teratur.

Hasil analisa menggunakan fungsi *autocorrelation* disajikan oleh Gambar 9 sebagai berikut.



(a)

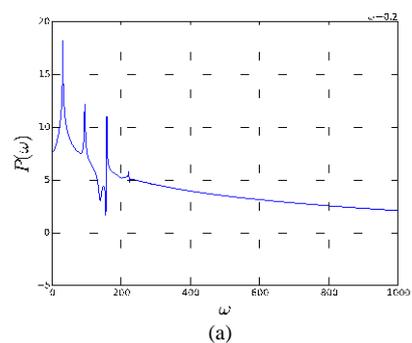


(b)

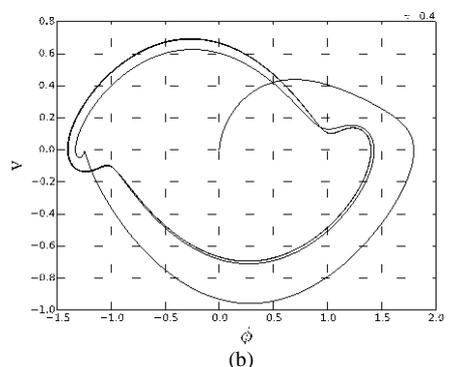
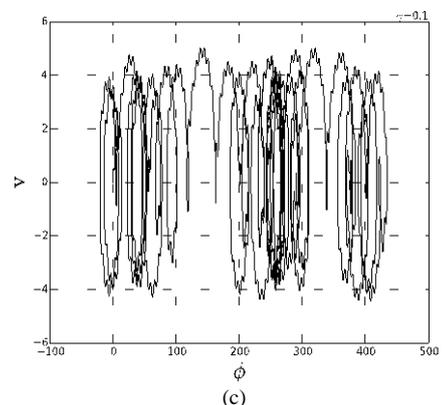
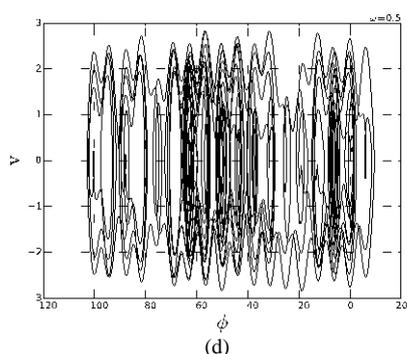
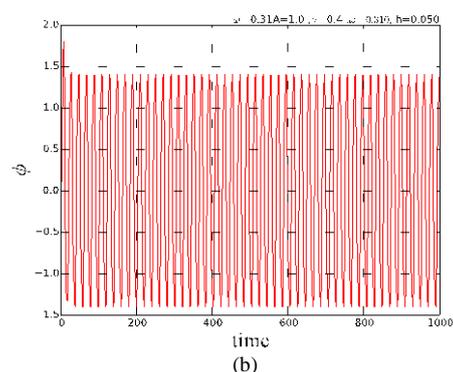
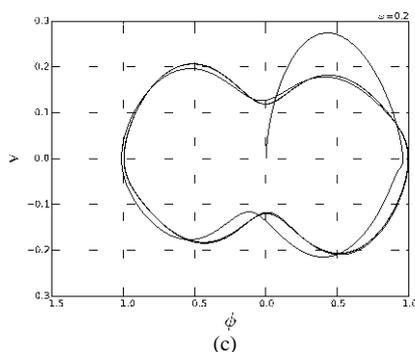
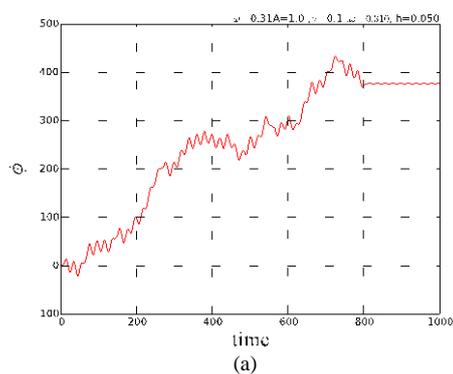
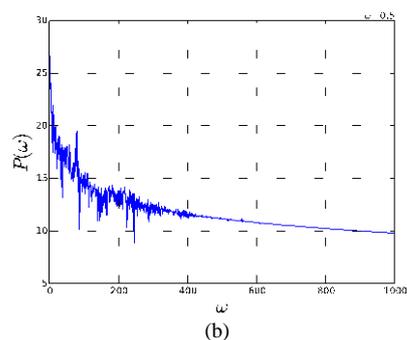
Gambar 9. Grafik analisa penyelesaian persamaan (2) menggunakan metode fungsi *autocorrelation*. (a) dinamika *order* untuk $\omega = 0.2$, (b) dinamika *order* $\omega = 0.5$.

Karakteristik dinamika pada Gambar 9 dapat dianalogikan seperti pada Gambar 5. Jika $\omega \leq 0.44$ maka sistem dalam keadaan *order*, sebaliknya pada saat $\omega > 0.44$ maka sistem dalam keadaan *order*.

Selain menggunakan analisa *autocorrelation function*, dinamika sistem *driven pendulum* ditunjukkan oleh Gambar 10 yang menggunakan metode analisa *power spectrum* dan diagram fase.



(a)



Gambar 10. Grafik analisa dinamika sistem *driven pendulum*. (a), (b) analisa menggunakan *power spectrum* untuk (a) $\omega = 0.2$, (b) $\omega = 0.5$. (c), (d) menggunakan diagram fase untuk (a) $\omega = 0.2$, (b) $\omega = 0.5$.

Gambar 10.a dan 10.c menunjukkan bahwa dinamika yang terjadi merupakan dinamika order. Dinamika tidak teratur ditunjukkan oleh Gambar 10.b dan 10.d.

2.2.3. Perubahan tetapan redaman (γ)

Tetapan redaman (γ) juga dapat mempengaruhi dinamika sistem *driven pendulum* selain amplitudo (A) dan frekuensi (ω) gaya paksa. Amplitudo dan frekuensi gaya paksa dibuat tetap nilainya yaitu $A=1.0$ dan $\omega=0.31$, diperoleh hasil sebagai berikut

Gambar 11. Grafik penyelesaian persamaan (2) dan hasil diagram fase. (a) dan (b) grafik antara waktu dengan posisi untuk nilai tetapan redaman (a) $\gamma = 0.1$, (b) $\gamma = 0.4$. (c) dan (d) diagram fase untuk nilai (c) $\gamma = 0.1$, (d) $\gamma = 0.4$.

Tetapan redaman (γ) dapat mengubah dinamika sistem *driven pendulum* dari dinamika tidak teratur menjadi dinamika *order*. Variasi nilai γ dapat menentukan perubahan dari dinamika sistem. Sistem tersebut dapat berubah dari dinamika tidak teratur menjadi *order* [9]. Analisa dinamika yang lain seperti *autocorrelation function* dan *power spectrum* ditunjukkan pada Gambar 12.

analisa dinamika menggunakan *autocorrelation function* (a) $\gamma=0.1$, (b) $\gamma=0.4$. (c) dan (d) analisa dinamika menggunakan *power spectrum* (c) $\gamma=0.1$, (d) $\gamma=0.4$

Dinamika tidak teratur dalam sistem *driven pendulum* ini terjadi pada daerah saat $\gamma \leq 0.32$ sedangkan dinamika *order* saat $\gamma > 0.32$. Sehingga tetapan γ dapat mengendalikan dinamika tidak teratur dalam sistem *driven pendulum*.

3. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Telah dilakukan penyelesaian persamaan model sistem *driven pendulum* dengan pendekatan numerik menggunakan metode ETD1. Metode ETD1 digunakan dalam penyelesaian (2) untuk beberapa keadaan yaitu jika salah satu dari ketiga variabel divariasikan, maka dua variabel yang lain dibuat tetap.

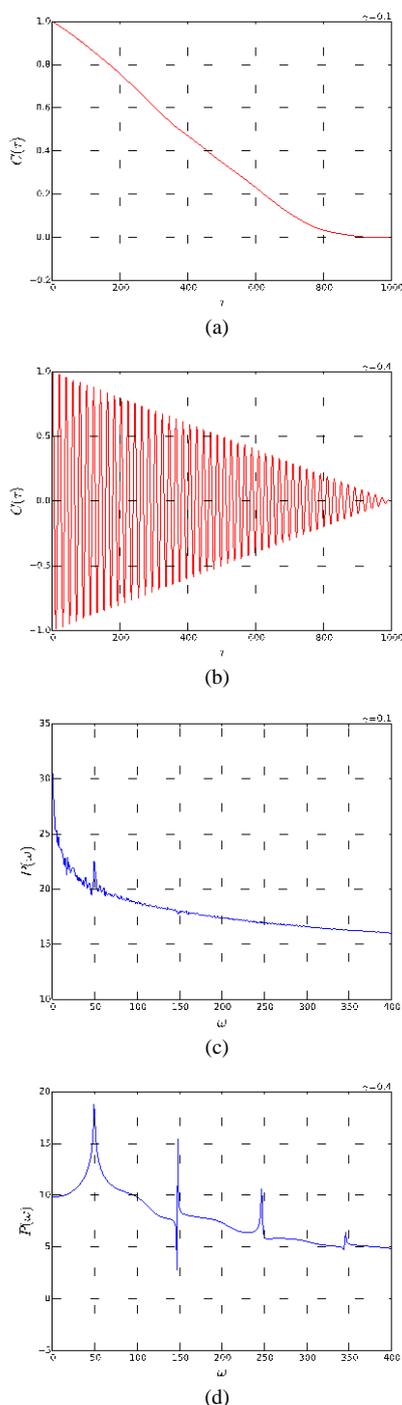
Hasil variasi nilai tiga variabel konstanta pada persamaan *driven pendulum* akan memberikan grafik yang menunjukkan keadaan dinamika *driven pendulum*. Analisis dinamika *driven pendulum* menggunakan analisa grafik posisi dengan waktu yang dihasilkan, lintasan pada ruang fase, analisa *autocorrelation function*, dan analisa *power spectrum*. Hasil analisa dinamika diperoleh daerah *order* dan *disorder (chaos)* untuk nilai variasi setiap variabel konstanta A , ω , dan γ .

ETD menjadi salah satu metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan diferensial. Khususnya adalah permasalahan diferensial sistem *stiff* dan persamaan diferensial yang digunakan adalah persamaan diferensial terhadap variabel waktu (t). Orde persamaan diferensial yang digunakan berorde 1. Jika orde diferensial lebih dari satu maka metode ETD dapat dikombinasikan dengan metode lain. Dalam penelitian ini metode ETD1 dikombinasikan dengan metode Euler karena persamaan diferensial mempunyai orde-2 terhadap variabel waktu.

Saran

Penelitian selanjutnya dalam menganalisis karakteristik dinamika sistem *driven pendulum* dapat menggunakan metode lain seperti metode Lyapunov eksponen.

Gaya paksa pada persamaan (2) dapat diganti menggunakan persamaan matematis lain sehingga dapat diperoleh dinamika *driven pendulum* yang lain.



Gambar 12. Grafik analisa dinamika Tidak teratur. (a) dan (b)

Ucapan terima kasih

Terakhir penulis mengucapkan terimakasih atas dukungan dari program penelitian Jurusan Fisika, FMIPA, UGM 2015.

Daftar Pustaka

- [1] Gitterman, Mosshe, 2010, The Chaotic Pendulum, World Scientific Publishing, USA.
- [2] Strogatz, Steven H., 1994, Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Books Publishing, USA.
- [3] Schwartz, S., Feugnet, G., Lariontsev, E., dan Pocholle, Jean-Paul, 2007, Oscillation regimes of a solid-state ring laser with active beat-note stabilization: From a chaotic device to ring-laser gyroscope, Physical Review A Vol.76.
- [4] Kratyuk, V, Moon, Un-Ku, 2007, A Design Procedure for All-Digital Phase-Locked Loops Based on a Charge-Pump Phase-Locked-Loop Analogy, IEEE Transaction on Circuits and System-II: Express Briefs, Vol.54, No.3
- [5] Cox, S.M dan Matthews, P.C, 2001, Exponential Time Differencing for Stiff System, Journal of Computational Physics, 176.430-455
- [6] Adams, R. A. Calculus: A Complete Course, 4th ed. Reading, MA: Addison Wesley, 1999.
- [7] Schuster, H.G, dan Just, W., 2005, Deterministic Chaos An Introduction, Wiley-VCH, Germany.
- [8] Korsch, H.J., Jodl, H.-J., Hartmann, T., 2008, Chaos: A Program Collection for the PC, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [9] Pratama, F.R, 2015, Simulasi Pengendalian Chaos dengan Model Couple map Lattice, Tesis Jurusan Fisika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam dan Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.