Jurnal Materi dan Pembelajaran Fisika (JMPF)
Volume 5 Nomor 2 2015 ISSN : 2089-6158

Simulasi *Chaos* dengan Model *Coupled Map Lattice*

Fachrizal Rian Pratama, Fahrudin Nugroho

Program Studi Ilmu Fisika, Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada
Jurusan Fisika Universitas Gadjah Mada Bulaksumur BLS 21, Yogyakarta 55281
E-mail : fachrizal.rian.p@mail.ugm.ac.id, fakhrud@ugm.ac.id

Abstrak

Mempelajari dan memahami fenomena *chaos* dalam suatu pembelajaran fisika kita dapat membuat suatu simulasi komputasi dari teori *chaos* yang ada. Dalam penelitian ini program komputasi simulasi c*haos* dibuat dengan menggunakan model c*oupled map lattice (CML).* Dengan menggunakan persamaan umum *logistic map*, dan model *CML*, kemudian merubah parameter a dapat memperlihatkan pola dari yang awalnya periodik kemudian berubah menuju *chaos*. Bahasa pemograman yang digunakan adalah bahasa C, dengan keluaran program berupa *raw data* yang kemudian diolah menggunakan *ImageJ*. Hasil keluaran berupa gambar dan video simulasi, yang kemudian digunakan untuk menjelaskan pola *chaos* tersebut. Hasil dari penelitian ini memperlihatkan simulasi *chaos* yaitu dengan nilai parameter yang sudah dipilih, pola simulasi yang awalnya periodik berubah menjadi pola *chaos*. Hasil analisis *fast fourier transform* (FFT), *autocorrelation* dan *lyapunov exponent* dalam penelitian ini dapat menunjukan pola yang dihasilkan adalah pola *chaos* dan dapat menjelaskan lebih luas tentang pola *chaos* itu sendiri.

Kata kunci : simulasi, chaos, couple map lattice

1. Pendahuluan

Memodelkan dan mengkarakterisasi fenomena kompleks dalam ruang dan waktu (*sptiotemporal)* sangatlah penting dalam kajian nonlinier secara umum, penerapannya tidak hanya dalam dinamika fluida tetapi juga dalam fisika zat padat, optika, reaksi kimia, dan juga pada biologi. Fenomena semacam ini disebut sebagai *"spatiotemporal chaos"*, yaitu sebagai dasar pengetahuan dalam teori sistem dinamik, khususnya pada teori *chaos*. Di awal tahun 1981 Kunihiko Kaneko, peneliti dari *University of Tokyo*, memulai sebuah simulasi dari sebuah model yang terdiri dari rangkaian *logistic maps coupled* dengan parameter di daerah yang bersifat *chaotic*. Pada saat itu kompleksitas pola *spatiotemporal* yang dihasilkan masih sulit diselesaikan dan berada di luar pengetahuan yang ada (Kaneko, K. 1990, 1992). Dalam penelitian ini peneliti ingin mensimulasikan fenomena *chaos,* dimulai dari mengkaji teori *chaos,* kemudian membuat program simulasinya dengan model *coupled map lattice (CML). CML* adalah suatu sistem dinamis dengan waktu diskrit *(map)*, ruang diskrit *(lattice)* dan dalam keadaan kontinu.

Salah satu eksperimen tentang *chaos* yaitu pada eksperimen yang pernah dilakukan oleh Noriko Oikawa. Noriko Oikawa, dkk pada tahun 2007, dalam papernya melaporkan suatu hasil eksperimen tentang *Controlling chaos for spatiotemporal intermittency*. Sebuah eksperimen pengendalian *spatiotemporal intermittency* pada sistem elektrokonvektif dalam liquid kristal nematik. Di dalam sebuah sistem elektrokonvektif dari liquid kristal nematik planar dapat memperlihatkan fenomena *spatiotemporal intermittency* dua dimensi, yaitu dari adanya pola *defect lattice* (DL) dan turbulensi. Turbulensi dalam *spatiotemporal intermittency* berubah menjadi stabil saat diberikan sebuah tegangan yang termodulasi. Dengan kata lain, *spatiotemporal intermittency* dapat dikendalikan oleh parameter kendali tertentu. Sehingga dari eksperimen yang dilakukan oleh Noriko Oikawa tersebut, yaitu adanya fenomena *spatiotemporal intermittency* yang dapat dikendalikan oleh suatu parameter kendali tertentu, menginspirasi penulis untuk melakukan penelitian dengan membuat sebuah simulasi pengendalian *chaos.* Kaitan antara penelitian yang dilakukan oleh Oikawa dan yang dilakukan peneliti, adalah pola *chaos* dari hasil eksperimen dan simulasi komputasinya ada kemiripan, kemudian modelnya sama-sama menggunakan *lattice*, dan dalam eksperimen menggunakan tegangan sebagai parameter kendali, sedangkan dalam simulasi menggunakan parameter pada persamaan *logistic map* (Oikawa, N., Hidaka, Y., dan Kai, S. 2008).

Untuk dapat mensimulasikan fenomena *chaos* tersebut, dibutuhkan model matematis, yaitu adalah sebuah model untuk *spatiotemporal chaos* yang pernah dilakukan oleh Kunihiko Kaneko, peneliti dari *University of Tokyo*. *CML* adalah suatu sistem dinamik dengan waktu diskrit, ruang diskrit, dan dalam keadaan kontinu. Motivasi utama dari model *CML* ini adalah digunakan untuk mempelajari *spatiotemporal chaos*. Selama 20 tahun terakhir ini, studi tentang *CML* telah diperluas tidak hanya untuk *spatiotemporal chaos*, tetapi juga diterapkan pada biologi, matematik dan teknik, meskipun fenomenanya masih sulit dipahami, tetapi banyak aplikasinya yang sudah mulai diterapkan (Parmananda, P., dan Jiang, Y. 1997).

Dengan menggunakan model CML akan dibuat simulasi *chaos* pada satu dimensi. Beberapa persamaan yang digunakan adalah persamaan *logistic map* dan persamaan *CML*. Bahasa pemograman yang digunakan adalah bahasa C (Kadir, A. 2001, Zarlis, M., dan Handrizal. 2007). Selanjutnya hasil berupa *raw* data yang diolah menggunakan *software ImageJ* (Faradiba. 2013, Ferreira, T., dan Rasband, W. 2011).

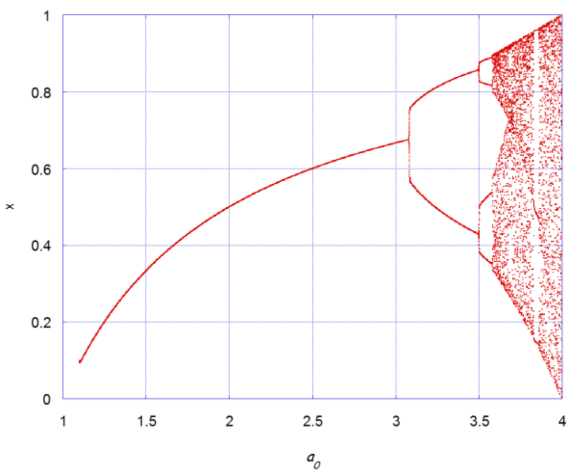
2. Pembahasan

2.1. *Diagram bifurkasi pada persamaan logistic map*

Penelitian simulasi *chaos* ini dimulai dengan membahas suatu persamaan yang disebut persamaan *logistic map*. Persamaan *logistic map* (May, R. M. 1976) yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \tag{1}$$

Persamaan sederhana ini dapat menampilkan berbagai pola yang dibutuhkan dalam simulasi dengan model *coupled map lattice*, dimana $1 \le a \le 4$. Dengan menggunakan program *Microsoft Office Excel 2007* peneliti membuat program untuk menghasilkan diagram bifurkasi dari *logistic map* yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram bifurkasi dari *logistic map*

Dari data komputasi yang didapat, menunjukan pada $1 < a < 3$, x_n meningkat seiring meningkatnya nilai n, sedangkan untuk nilai a yang lebih besar (misal $a = 3.33$), x_n menunjukan nilai perulangan setiap dua iterasi, yang disebut *period-2 cycle*, dan untuk nilai a yang lebih besar lagi (misal $a = 3.5$), x_n menunjukan nilai perulangan setiap empat iterasi, yang disebut *period-4 cycle*, sampai selanjutnya siklus ini terus berulang *period-8,16,32,... cycle* seiring meningkatnya nilai a. Diagram bifurkasi menunjukan perilaku keseluruhan dari semua nilai a. Pada $a = a_z$ (z adalah nilai disekitar batas atas nilai a, yaitu saat a =4), *map* menjadi *chaotic* dan dari titik-titik yang awalnya terbatas (*finite points*) menjadi titik-titik yang tak terhingga (*infinite points*). Pada $a > a_z$ terjadi campuran dari *order* dan *chaos*, yaitu order ditandai adanya pola keteraturan . Ditandai dengan adanya *periodic windows* diantara kumpulan titik-titik yang *chaotic*. *Periodic windows* tersebut dapat diamati disekitar $a = 3.83$.

2.2. *Simulasi chaos* dengan model *coupled map lattice* satu dimensi

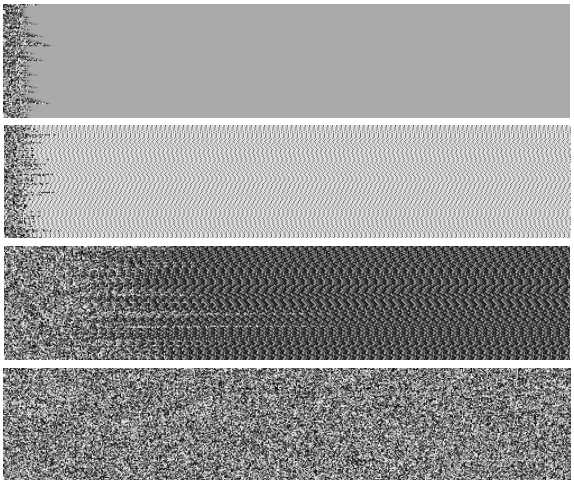
Ini adalah suatu sistem yang terdiri dari elemen-elemen dinamis pada sebuah *lattice*, yang mana saling berhubungan (*coupled)* dengan nilai masing-masing elemen yang sesuai antara satu sama lain. Persamaan *CML* (Kaneko, K. 1990, 1992) yang digunakan pada satu dimensi adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon) f(x_n(i)) + \varepsilon/2\left[f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))\right] \tag{2}$$

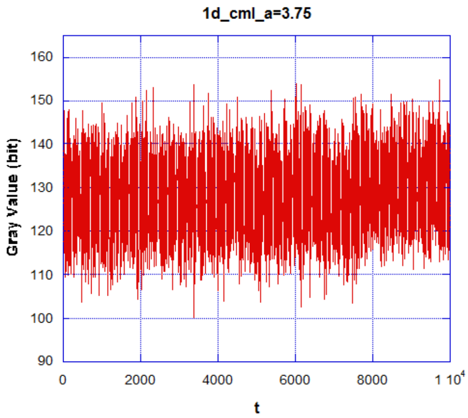
Dengan *"n"* adalah *discrete time step* dan *"i"* adalah *discrete lattice point* $i = 1,2,3,...Lx$ dimana Lx adalah ukuran sistem dan $f(x)$ adalah persamaan *logistic map*.

Simulasi dilakukan dengan ukuran *lattice* (*space size*) $Lx = 100$, dan waktu yang digunakan $Nt = 10000$. Kemudian nilai a yang divariasi dimulai pada saat keadaan masih stabil yaitu $a = 1.25$ dan $a = 1.50$, yang kedua keadaan menjadi periodik dan *quasi-periodic* yaitu pada $a = 3.40$, $a = 3.50$ dan $a = 3.55$ dan yang ketiga saat keadaan menjadi *chaos* $a = 3.75$. Parameter selanjutnya yang divariasi adalah nilai ε *(coupling constant)*, dimana $0 \le \varepsilon \le 1$, variasi yang digunakan adalah $\varepsilon = 0.00; \varepsilon = 0.01; \varepsilon = 0.10; \varepsilon = 1.00$.

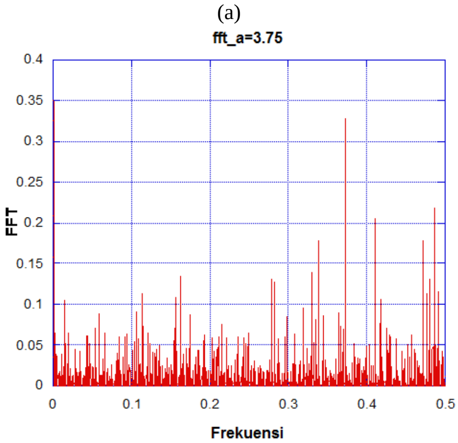
Pada gambar 2 menunjukkan interaksi nonlinier temporal yang dihasilkan oleh persamaan *logistic* *map*, dengan nilai *a* yang semakin besar menyebabkan pola yang awalnya periodik menjadi semakin *chaos*. Selanjutnya grafik *plot profile* dan FFT untuk pola *chaos* diperlihatkan pada gambar 3.



Gambar 2. *Space-time diagram* CML 1D untuk masing-masing nilai $a = 1.50$, $a = 3.50$, $a = 3.55$ dan $a = 3.75$



(a)



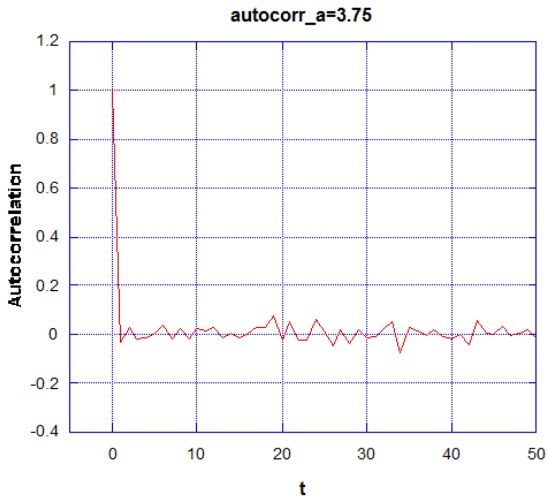
(b)

Gambar 3. (a) *Space-time plot profile* dan (b) Grafik FFT simulasi CML satu dimensi saat $a = 3.75$.

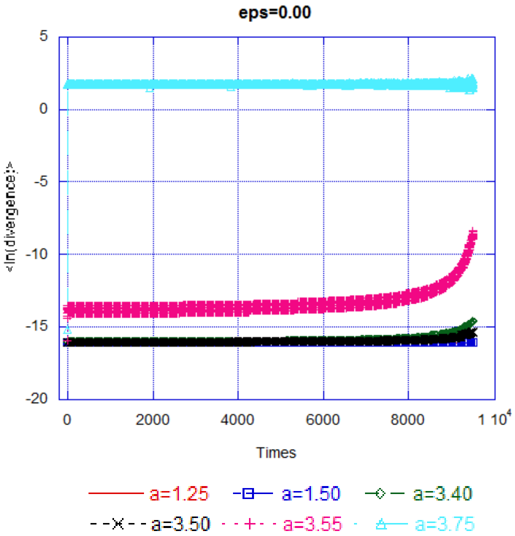
Dengan menggunakan program *FFT* (Press, W.H., 1988) peneliti bisa menentukan frekuensi dominan dari intensitas data *time series* pada simulasi *chaos* tersebut. Pada saat masih periodik hanya ada satu sampai beberapa frekuensi dominan saja tetapi pada gambar 3b ini terlihat seperti sekumpulan grafik noise yang merata, dan seperti inilah sistem yang *chaos*.

Selanjutnya dengan menggunakan program *autocorrelation* (Press, W.H., 1988) dari intensitas data *time series* yang diperoleh diolah menjadi grafik *autocorrelation* yang diperlihatkan pada gambar 4. Grafik *autocorrelation* menunjukan adanya *decay* yang sangat cepat pada grafik tersebut, yang berarti ada *decay of information* yang tinggi sehingga dari analisis ini bisa disimpulkan sistem tersebut *chaos*.

Dalam kajian teori *chaos* analisis Lyapunov eksponen (M.T. Rosenstein, 1993, 1994) berfungsi untuk menentukan ketergantungan sebuah sistem yang sensitif terhadap kondisi awal. Selain itu, metode Lyapunov eksponen digunakan untuk menganalisis prilaku dinamika dari sebuah sistem. apakah perilakunya *chaos*, *limit cycle* atau periodik. Pada gambar 5 adalah grafik *lyapunov exponent* yang menunjukan pada saat nilai $a = 1.25$, $a = 1.50$, $a = 3.40$, $a = 3.50$ dan $a = 3.55$ lyapunov eksponen-nya kurang dari $0\left(\lambda < 0\right)$ dan saat $a = 3.75$, nilai lyapunov eksponen-nya lebih dari $0\left(\lambda > 0\right)$. Yaitu dimana saat $\lambda < 0$, semakin negatif bilangan ini, stabilitasnya semakin besar. Sebaliknya saat $\lambda > 0$ bersifat tidak stabil dan mengalami *chaos*.



Gambar 4. Grafik *autocorrelation* saat $a = 3.75$, simulasi *chaos* dengan model CML satu dimensi..



Gambar 5. Grafik *Lyapunov exponent* simulasi *chaos* dengan model CML satu dimensi.

Lyapunov eksponen berguna untuk membedakan berbagai tipe dari orbit. Bilangan ini berlaku baik untuk sistem diskret maupun kontinu. Bilangan Lyapunov negatif merupakan karakteristik dari sistem disipatif atau nonkonservatif. Semakin negatif bilangan ini, stabilitasnya akan semakin besar. Titik-titik tetap dan periodik superstabil memiliki bilangan Lyapunov $\lambda = -\infty$. Bilangan Lyapunov nol mengindikasikan sistem berada dalam keadaan tunak. Sistem fisis yang demikian akan bersifat konservatif. Sedangkan saat nilai lyapunov exponent positif berarti bersifat tidak stabil dan mengalami *chaos*. Titik-titik yang berdekatan akan menyebar pada jarak yang sembarang. Seluruh tetangga dalam ruang fase akan dilewati. Penelitian ini lebih lanjut perlu juga di coba pada simulasi dua dimensi, kemudian bisa juga dikembangkan bahkan sampai pada pengendalian *chaos* (Ott, E, 1990, Palaniyandi, P., 2007, Parmananda, P., 1997). Penelitian terkait masih sedang dilakukan dan akan dipublikasikan pada kesempatan yang lain.

3. Kesimpulan

Telah dilakukan penelitian simulasi *chaos* dengan model *CML* pada satu dimensi. Hasil penelitian ini memperlihatkan simulasi *chaos* yaitu dengan nilai parameter yang sudah dipilih, pola simulasi yang awalnya periodik berubah menjadi pola *chaos*. Hasil analisis FFT, *autocorrelation* dan *lyapunov exponent* dalam penelitian ini dapat menunjukan pola yang dihasilkan adalah pola *chaos* dan dapat menjelaskan lebih luas tentang pola *chaos* itu sendiri. Selain itu juga hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan pembelajaran dalam fisika nonlinier, khususnya dalam pokok bahasan *chaos.*

Ucapan terima kasih

Terakhir penulis (F.R.P.) mengucapkan terimakasih atas dukungan dari program penelitian Jurusan Fisika, FMIPA, UGM 2015.

Daftar Pustaka

Kaneko, K. 1990. *Formation Dynamics and Statistics of Patterns*. World Scientific. Singapore.

Kaneko, K. 1992. Overview of Coupled Map Lattices. *An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 2(3): 279-282.

Oikawa, N., Hidaka, Y., dan Kai, S. 2008. Controlling chaos for spatiotemporal intermittency. *Physical Review E* 77.

Parmananda, P., dan Jiang, Y. 1997. Controlling localized spatiotemporal chaos in a one-dimensional coupled map lattice. *Physical Letter A* 231: 159-163.

Kadir, A. 2001. *Pemograman dasar Turbo C untuk IBM PC*. Penerbit Andi. Yogyakarta.

Zarlis, M., dan Handrizal. 2007. Bahasa Pemograman Konsep dan Aplikasi dalam C++. USU Press. Medan

Faradiba. 2013. Simulasi Model Ising 2D dengan Faktor Medan Magnet dan Temperatur menggunakan ImageJ. *Tesis*. FMIPA UGM.

Ferreira, T., dan Rasband, W. 2011, 2012. ImageJ User Guide. *imagej.nih.gov/ij/docs /guide*, 1 Oktober 2013.

May, R. M. 1976. *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*. Nature 261.

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T. 1988, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press.

M.T. Rosenstein, J.J. Collins, and C.J. De Luca. 1993. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. Physica D 65:117-134.

M.T. Rosenstein, J.J. Collins, and C.J. De Luca. 1994. Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times. Physica D 73:82-98.

Ott, E., Grebogi, C., dan Yorke, J.A. 1990. Controlling Chaos. *Physicsl Review Letters* 64(11).

Palaniyandi, P., dan Rangarajan, G. 2007. Critical lattice size limit for synchronized chaotic state in one- and two-dimensional diffusively coupled map lattices. *Physical Review E* 76.

Parmananda, P., dan Jiang, Y. 1997. Controlling localized spatiotemporal chaos in a one-dimensional coupled map lattice. *Physical Letter A* 231: 159-163.