



Model Pembakaran Materi Bersimetri Bola Dalam Ruang Tertutup Dengan Metode *Exponential Time Differencing*

Fahrudin Nugroho¹, Halim Hamadi¹

¹Program Studi Ilmu Fisika, Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada
Jurusan Fisika Universitas Gadjah Mada Bulaksumur BLS 21, Yogyakarta 55281
E-mail : fakhrud@ugm.ac.id¹, halim.hamadi@mail.ugm.ac.id¹

Abstrak

Dalam penelitian kali ini telah diuji suatu metode pendekatan numerik yang bernama metode *exponential time differencing* (ETD) pada persamaan diferensial tak linear. Persamaan diferensial tersebut memodelkan pembakaran benda bersimetri bola dalam ruang tertutup. Hasil dari penyelesaian persamaan diferensial dengan metode tersebut akan dibandingkan dengan hasil dari pendekatan Euler dan Runge-Kuta. Dengan penelitian ini dihasilkan pendekatan numerik yang bisa diterapkan pada persamaan diferensial yang mempunyai sifat stiff.

Kata kunci : Persamaan diferensial stiff, *exponential time differencing* (ETD), Pendekatan Euler dan Runge-Kuta.

1. Pendahuluan

Pembakaran adalah reaksi yang mudah didapati dan diamati di alam, contohnya pembakaran materi biasa sampai dengan reaksi pembakaran dalam organisme hidup. Proses pembakaran juga merupakan proses utama yang digunakan pada mesin-mesin konvensional atau biasa disebut mesin bakar. Pada mesin tersebut gaya gerak dihasilkan dari efek pembakaran.

Terdapat banyak artikel yang membahas mengenai efisiensi pembakaran dan pemanfaatannya dalam teknologi mesin bakar [1]. Beberapa penelitian untuk pembakaran materi yang spesifik misalnya jenis oksida [2] termasuk pemodelan pembakaran yang melibatkan NO_x [3] juga telah banyak dilakukan.

Dalam penelitian kali ini akan diuji model bagi pembakaran dengan persamaan diferensial orde satu sebagai berikut.

$$\dot{y} = -k_1 y^2 + k_2 y^3 \quad (1)$$

Adapun y adalah dimensi atau ukuran materi dan k_1 dan k_2 adalah tetapan-tetapan yang terkait sifat materi yang dibakar.

Persamaan (1) di atas menunjukkan bahwa dinamika pembakaran tergantung pada dua faktor utama. Faktor pertama adalah permukaan dimana reaksi pembakaran terjadi, yang diwakili oleh suku

pertama sebelah kanan yang merupakan orde dua dari ukuran materi. Sedangkan suku kedua menunjukkan adanya perubahan volume dari proses pembakaran yang merupakan orde tiga dari ukuran materi.

Beberapa sifat utama dari persamaan (1) di atas adalah bahwa persamaan tersebut memodelkan pembakaran materi bersimetri bola. Hal ini dapat dilihat dari suku pertama dan kedua yang merupakan bentuk permukaan (y^2) dan volume (y^3) bola. Tetapan-tetapan k_1 dan k_2 untuk kasus materi bersimetri bola terskala sesuai dengan tetapan persamaan bola yaitu secara berurutan 4π dan $4\pi/3$ atau dapat dirumuskan $k_1/k_2=1/3$. Dalam pendekatan komputasi dan memudahkan proses analisis perbandingan antara dua konstanta tersebut bisa didefinisikan sama dengan satu. Terakhir dan terpenting adalah persamaan (1), merupakan persamaan diferensial tak linear dan dikategorikan sebagai persamaan yang stiff. Oleh karenanya diperlukan pendekatan komputasi yang khusus dalam penyelesaiannya.

2. Pembahasan

2.1. Metode Komputasi

Dalam penelitian kali ini akan digunakan metode khusus yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan sifat stiff. Hal ini dikarenakan model persamaan yang akan dipakai yaitu persamaan (1) merupakan persamaan diferensial yang tak linear dan mempunyai sifat stiff. Dua metode yang standar yaitu metode Euler dan Runge-Kuta juga akan digunakan dalam penyelesaian metode ini. Namun kedua metode tersebut tidak akan diulas dalam artikel ini [4]. Metode komputasi yang akan diulas dalam penelitian kali ini adalah metode exponential time differencing (ETD) [5].

Untuk memformulasikan metode ETD perlu dijelaskan mengenai Faktor Integrasi. Faktor integrasi adalah sebuah fungsi yang mana jika dikalikan dengan persamaan diferensial biasa akan dapat menghasilkan persamaan diferensial yang dapat diintegrasikan.

Sebagai contoh adalah persamaan diferensial orde-1:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x) \quad (2)$$

dimana p dan q adalah fungsi yang kontinyu, dapat diintegrasikan dengan memasukkan fungsi $v(x)$

$$v(x) = \int p(x) dx \quad (3)$$

sehingga diperoleh kaitan

$$\frac{dv(x)}{dx} = p(x) \quad (4)$$

dan tetapan integrasi sebesar $e^{v(x)}$ [6], apabila dikalikan dengan fungsi $y(x)$ diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [e^{v(x)} y(x)] \\ & = e^{v(x)} \left[\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) \right] = e^{v(x)} q(x) \end{aligned} \quad (5)$$

ang mana persamaan (5) mempunyai solusi [7]

$$y(x) = e^{-v(x)} \int q(x) dx \quad (6)$$

Persamaan diferensial ordinary yang bergantung pada diskritisasi waktu mempunyai bentuk yang dapat dianalogikan seperti persamaan (1)

$$\frac{du(t)}{dt} = cu(t) + F(u,t)$$

$$\frac{du(t)}{dt} - cu(t) = F(u,t) \quad (7)$$

Dari persamaan (6) dapat diambil bagian $p(x)$ bernilai c yang nilainya konstan tidak bergantung terhadap fungsi waktu.

Metode faktor integrasi tersebut jika diterapkan pada persamaan (7) diperoleh dengan langkah

$$\frac{dv(t)}{dt} = -c,$$

dengan bentuk faktor integrasi

$$e^{v(x)} = e^{-ct}. \quad (8)$$

Menggunakan faktor pengali sesuai dengan persamaan (8) di atas pada persamaan (7) akan diperoleh ungkapan matematis berikut

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{-ct} u(t)] & = -ce^{-ct} u(t) + e^{-ct} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{d}{dt} [e^{-ct} u(t)] & = e^{-ct} \left[-cu(t) + \frac{du(t)}{dt} \right] \\ \frac{d}{dt} [e^{-ct} u(t)] & = e^{-ct} F(u,t). \end{aligned} \quad (9)$$

Apabila persamaan (8) kita integralkan dengan batas $t = t_n$ sampai $t = t_{n+1}$ dan dapat diambil langkah waktu sebesar $h = t_{n+1} - t_n$. Dengan demikian persamaan (9) dapat dituliskan pada bentuk integral.

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} d(e^{-ct} u(t)) & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-ct} F(u,t) dt \\ \Leftrightarrow \int_0^h d(e^{-ct} u(t)) & = \int_0^h e^{-ct} F(u,t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Penyelesaian bentuk integral pada persamaan (9) akan menghasilkan

$$\begin{aligned} [e^{-ct} u(t)]_0^h & = \int_0^h e^{-ct} F(u,t) dt \\ [(e^{-ch} u(h) - (e^{-c0} u(0)))] & = \int_0^h e^{-ct} F(u,t) dt \\ \left(\frac{u(h)}{e^{ch}} \right) & = u(0) + \int_0^h e^{-ct} F(u,t) dt \\ u(h) & = e^{ch} u(0) + e^{ch} \int_0^h e^{-ct} F(u,t) dt \end{aligned} \quad (10)$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$u(t_{n+1}) = e^{ch}u(t_n) + e^{ch} \int_0^h e^{-c\tau} F(u_{t_n+\tau}, t_n + \tau) d\tau \quad (11)$$

Untuk tinjauan yang paling sederhana yaitu dengan menganggap $F(u_{t_n+\tau}, t_n + \tau)$ adalah konstan, serta dapat dilakukan pendekatan yaitu $u(t_n) = u_n$ dan $F(u_n, t_n) = F_n$. Persamaan (11) dapat disederhanakan menjadi

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + e^{ch} \int_0^h e^{-c\tau} F_n d\tau \quad (12)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (12) di atas dapat diperoleh

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + e^{ch} F_n \left[-\frac{e^{-c\tau}}{c} \right]_0^h$$

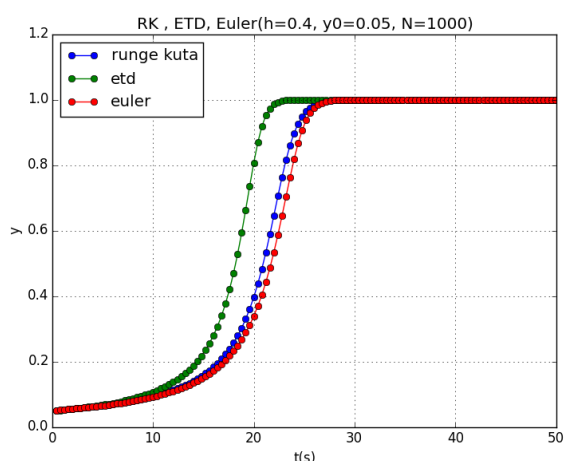
$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + \left(-\frac{e^{ch} F_n e^{-ch}}{c} + \frac{e^{ch} F_n e^{-c0}}{c} \right)$$

$$u_{n+1} = u_n e^{ch} + F_n \frac{(e^{ch} - 1)}{c} \quad (13)$$

Persamaan (13) merupakan metode First Order Exponential Time Differencing (ETD1) yang mempunyai ralat pemotongan sebesar $h^2 \dot{F}/2$.

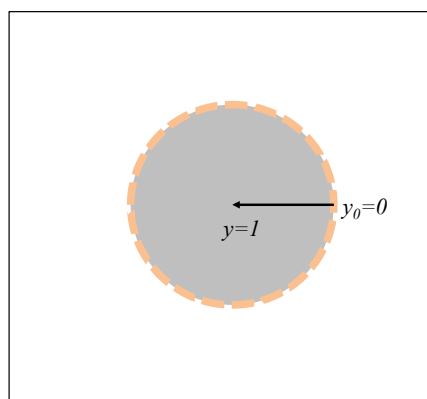
2.2. Hasil

Hasil penerapan metode ETD dibandingkan dengan metode Euler dan Runge-Kuta pada persamaan pembakaran (1) dapat dilihat pada Gambar 1 sebagai berikut.



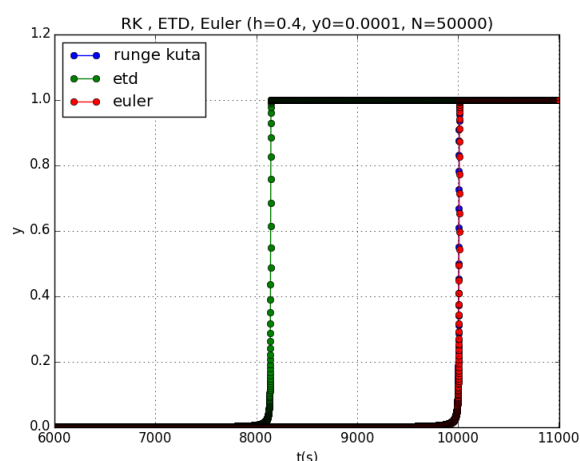
Gambar 1. Solusi numerik persamaan (1) dengan menggunakan tiga metode: Runge-Kuta (RK), exponential time differencing (ETD), dan Euler. Waktu langkah $h=0,4$, nilai awal $y_0=0.05$ dan cacah langkah $N=1000$.

Gambar 1 menunjukkan bahwa ketiga metode yang diuji bisa digunakan untuk menyelesaikan secara numerik persamaan (1), terutama pada kasus nilai awal yang besar $y_0=0.05$. Ada sedikit selisih antar masing-masing metode namun secara kualitatif bentuk fungsi dari ketiganya masih dekat. Adapun interpretasi fisi dari grafik pada gambar 1 di atas adalah sebagai berikut. Pertama bahwa reaksi pembakaran pada materi bersimetri bola terjadi dari sisi luar menuju ke bagian dalam. Posisi awal terluar diberikan nilai awal yaitu $y_0=0.05$. Seiring dengan waktu maka proses pembakaran akan menuju pusat bola dan berakhir tepat di inti bola atau pada posisi $y=1$ (untuk $k_1/k_2=1$). Gambar 2 menunjukkan ilustrasi dari proses pembakaran materi bersimetri bola yang terjadi dalam ruang tertutup.



Gambar 2. Ilustrasi reaksi pembakaran yang terjadi pada materi bersimetri bola. Pembakaran terjadi dari sisi luar $y=0$ menuju pusat bola $y=1$.

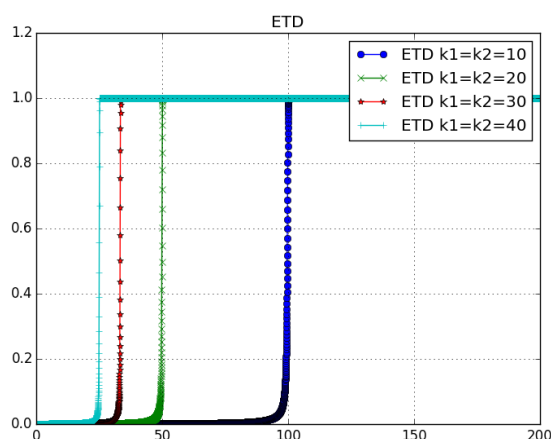
Selanjutnya dengan memperkecil nilai awal dan menambah cacah langkah diperoleh Gambar 3.



Gambar 3. Solusi persamaan (1) dengan masukan awal yang kecil $y=0.0001$. Terlihat perbedaan yang besar antara metode ETD dan dua metode yang lain.

Gambar 3 menunjukkan perbedaan yang mencolok antara metode ETD dengan metode Euler dan metode Runge-Kuta. Tampak bahwa solusi yang diharapkan yaitu $y \rightarrow 1$. Dari hasil ini terlihat bahwa jika digunakan cacah langkah yang kecil ($t \leq 8000$ s) maka metode Euler dan Runge-Kuta belum bisa menunjukkan saturasi di $y \rightarrow 1$. Bahkan pada $t < 10000$ tampak bahwa metode Euler dan Runge-Kutta masih bernilai sekitar $y = 0.0001$. Terdapat selisih waktu sekitar 2000 s (20%) antara metode ETD dengan dua metode yang lain. Ditinjau dari sisi komputasi, maka metode ETD mempunyai efisiensi waktu yang tinggi jika dibandingkan dengan dua metode yang lain.

Selanjutnya dengan menggunakan metode ETD ditunjukkan pengaruh variasi konstanta k_1 dan k_2 seperti gambar 4 berikut.



Gambar 4. Pengaruh variasi k_1 dan k_2 dalam persamaan (1). Variasi yang dilakukan adalah untuk $k = 10, 20, 30$ dan 40 .

Gambar 3 menunjukkan bahwa semakin besar nilai k , maka nilai maksimal y yaitu $y=1$ segera dicapai. Hal ini sesuai dengan hipotesa bahwa nilai konstanta tersebut dapat diinterpretasikan sebagai konstanta yang terkait langsung dengan sifat intrinsik, yaitu bersifat flammable atau tidak, dari materi yang dibakar. Semakin besar nilai k maka reaksi pembakaran akan semakin cepat.

3. Kesimpulan dan Saran

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian ini dapat disimpulkan beberapa hal. Pertama, bahwa pendekatan numerik *Exponential Time Differencing* dapat diterapkan pada persamaan tak linear (1). Pendekatan ETD terbukti lebih cepat menyelesaikan persamaan (1) jika dibandingkan dengan pendekatan Euler dan Runge-Kutta.

SARAN

Sejauh ini telah ditunjukkan bahwa metode ETD dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada persamaan (1). Selanjutnya perlu diuji pengaruh perubahan nilai awal y_0 , nilai selang waktu h dan $k_1=k_2=k$ yang masih bisa menghasilkan solusi dari persamaan (1).

UCAPAN TERIMA KASIH

Terakhir penulis (F.N.) mengucapkan terimakasih atas dukungan dari program penelitian Jurusan Fisika, FMIPA, UGM 2015.

Daftar Pustaka

- [1] Reitz dan Duraisamy, "Review of high efficiency and clean reactivity controlled compression ignition (RCCI) combustion in internal combustion engines", *Progress in Energy and Combustion Science* 46 (2015) 12-71.
- [2] Kingsley, J. J., and K. C. Patil. "A novel combustion process for the synthesis of fine particle α -alumina and related oxide materials." *Materials Letters* 6.11 (1988): 427-432.
- [3] Xu, M., J. L. T. Azevedo, and M. G. Carvalho. "Modelling of the combustion process and NO x emission in a utility boiler." *Fuel* 79.13 (2000): 1611-1619.
- [4] DeVries, P. L., *A first course in computational physics*, Wiley, 1994.
- [5] Cox, S.M and Mathews, P.C, "Exponential Time Differencing for Stiff System", *J. Comput. Phys* 2001.
- [6] Morse, P.M. and Feshbach, H. *Methods of Theoretical Physics, Part I*. New York: McGraw-Hill, pp. 526-529, 1953.
- [7] Adams, R. A. *Calculus: A Complete Course*, 4th ed., Reading, MA: Addison Wesley, 1999