

# PERANCANGAN KONTROL SISTEM INTEGRATOR MULTI AGEN DENGAN FORMASI SEGITIGA

R. Heru Tjahjana  
Program Studi Matematika Jurusan Matematika  
FMIPA UNDIP Semarang  
heru\_tjahjana@undip.ac.id

**Abstract.** In this paper, a model of swarm movement in triangular formation is considered. The flocking of geese happening in nature motivates this model. The model is described by several integrator systems. The movement of the swarm formation is required to preserve a triangle formation from one particular position to the other position. The triangular formation above is translated to a functional cost that must be minimized. This functional cost consists of an error function, repellent term and energy put to control each agent. The theorem of swarm movement in a triangular formation and some simulation results are presented in the end of the paper.

**Keywords:** Swarm, Triangle formation, error function

## 1. PENDAHULUAN

Model matematika untuk perilaku menggerombol atau *swarm* merupakan modal utama dalam pengendalian sistem multi robot atau yang dalam teori kontrol disebut multi agen. Para robot yang dikendalikan dipandang sebagai agen-agen yang menuntaskan tugas. Sistem multi agen dewasa ini berkembang dalam berbagai bidang seperti telekomunikasi, transportasi, pertahanan, dan sebagainya.

Gazi memodelkan *swarm* pada ruang berdimensi  $n$  dan mempelajari perilaku agen di pusat *swarm* (Gazi dan Passino, 2003). Model ini digeneralisasi oleh Chu (Chu *et al.*, 2003) dengan memasukkan faktor keterkaitan antar agen dalam bentuk matriks simetri. Shi (Shi *et al.*, 2004) memodelkan *swarm* dengan model yang identik dengan (Chu *et al.*, 2003) tetapi matriksnya asimetri.

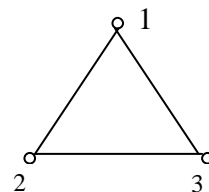
Kelemahan dari model-model di atas adalah *swarm* yang dimodelkan tidak berpindah tempat, bahkan pusatnya stasioner. Karena nantinya fenomena *swarm* ini ingin dimanfaatkan untuk sistem navigasi wahana transportasi yang bergerak, maka model *swarm* yang berpindah posisi diperlukan. Dalam paper ini, dirancang kontrol untuk *swarm* multi agen yang berpindah tempat dari satu

posisi ke posisi yang lain dengan ongkos semurah mungkin.

Beberapa hasil penelitian sebelumnya yang telah dipublikasikan antara lain adalah model *swarm* dengan formasi segitiga untuk tiga agen (Tjahjana *et al.*, 2006a) dan model *swarm* melalui kontrol optimal dengan penalti fungsi eksponensial. (Tjahjana *et al.*, 2006b) Selain itu Pranoto dkk.telah menyajikan simulasi dua agen dari pemodelan *swarm* melalui sistem kontrol optimal (Pranoto *et al.*, 2006a) dan melalui sistem kontrol optimal bilinear (Pranoto *et al.*, 2006b). Nilai lebih paper ini dibandingkan dengan (Tjahjana *et al.*, 2006a), (Tjahjana *et al.*, 2006b), (Pranoto *et al.*, 2006a) dan (Pranoto *et al.*, 2006b) adalah adanya hasil analitik secara umum yang dibuktikan secara matematis.

## 2. SISTEM TIGA AGEN

Perhatikan gambar 1 berikut.



Gambar 1. *Swarm* integrator 3 agen

Swarm 3 agen di  $R^2$  yang berformasi seperti gambar 1 dimodelkan sebagai

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

dengan  $\mathbf{x}_i$  vektor posisi dan  $\mathbf{u}_i$  vektor kontrol. Bentuk matriks model (1) ditulis

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_2 \\ v_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_3 \\ v_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Syarat awal dan akhir model (2) diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_1(0) = q_1 \quad y_1(T) = q_2 \\ y_2(0) = q_3 \quad y_2(T) = q_4 \\ y_3(0) = q_5 \quad y_3(T) = q_6 \\ y_4(0) = q_7 \quad y_4(T) = q_8 \\ y_5(0) = q_9 \quad y_5(T) = q_{10} \\ y_6(0) = q_{11} \quad y_6(T) = q_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

Syarat-syarat pemilihan nilai-nilai pada (3) adalah nilai-nilai yang membuat para agen bergerak relatif jauh dari posisi awal ke posisi akhir. Selanjutnya, untuk memodelkan perilaku para agen yaitu tetap berjarak 1 dari awal sampai akhir dan tidak saling mendekat satu sama lain, maka disusunlah fungsional ongkos yang diberikan sebagai

$$\begin{aligned} J = & -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^6 \delta v_i^2 + \mu (\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (y_4 - y_5)^2} - 1)^2 \\ & + \mu (\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (y_4 - y_6)^2} - 1)^2 \\ & + \mu (\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (y_5 - y_6)^2} - 1)^2 \\ & + \frac{\rho}{(y_1 - y_2)^2 + (y_4 - y_5)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\rho}{(y_1 - y_3)^2 + (y_4 - y_6)^2} \\ & + \frac{\rho}{(y_2 - y_3)^2 + (y_5 - y_6)^2} dt \end{aligned}$$

Suku pertama pada fungsional ongkos  $J$  adalah ongkos total pengendalian untuk masing-masing agen. Suku kedua sampai suku keempat fungsional ongkos  $J$  adalah suku-suku yang memaksa para agen akan berjarak sama dengan 1. Suku ke lima sampai dengan suku ke tujuh dari fungsional ongkos  $J$  akan memaksa para agen tidak bertabrakan satu sama lain. Akibatnya dapat ditentukan Hamiltonian berikut

$$\begin{aligned} H = & \sum_{i=1}^6 p_i v_i - \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \delta p_0 v_i^2 \\ & - \frac{1}{2} \mu p_0 (\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (y_4 - y_5)^2} - 1)^2 \\ & - \frac{1}{2} \mu p_0 (\sqrt{(y_1 - y_3)^2 + (y_4 - y_6)^2} - 1)^2 \\ & - \frac{1}{2} \mu p_0 (\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (y_5 - y_6)^2} - 1)^2 \\ & - \frac{\frac{1}{2} \rho p_0}{(y_1 - y_2)^2 + (y_4 - y_5)^2} \\ & - \frac{\frac{1}{2} \rho p_0}{(y_1 - y_3)^2 + (y_4 - y_6)^2} \\ & - \frac{\frac{1}{2} \rho p_0}{(y_2 - y_3)^2 + (y_5 - y_6)^2} \end{aligned}$$

dan diperoleh Sistem Hamiltonian

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{y}_i = v_i \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_i \\ \frac{\partial H}{\partial v_i} = p_i - \delta p_0 v_i = 0 \end{array} \right.$$

untuk  $i = 1, 2, \dots, 6$

$$p_i - \delta p_0 v_i = 0 \Rightarrow v_i = \frac{p_i}{\delta p_0} = -\frac{p_i}{\delta}$$

$$\dot{y}_1 = v_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = -\frac{p_1}{\delta} \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\frac{\dot{p}_1}{\delta}$$

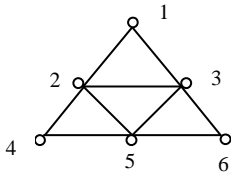
Jadi harus diselesaikan

$$\ddot{y}_1 = -\frac{\dot{p}_1}{\delta}$$

dengan syarat awal dan akhir

$$y_i(0) = q_{2i-1}$$

$$y_i(T) = q_{2i}$$



Gambar 2. Swarm 6 agen.

### 3. SISTEM ENAM AGEN

Model *Swarm* 6 agen di  $R^2$  yang berformasi seperti gambar 2 adalah

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (4)$$

dengan  $\mathbf{x}_i$  dan  $\mathbf{u}_i$  masing-masing vektor posisi dan vektor kontrol agen ke  $i$ . Dalam matriks, model (4) ditulis

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{y}_{i+6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+6} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (5)$$

Syarat awal dan akhir model (5)

$$y_i(0) = q_{2i-1} \quad y_i(T) = q_{2i}$$

Fungsional ongkos diberikan

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{12} \delta v_i^2 + \mu \sum_{\substack{i < m \\ m \leq 6}} (d(\text{agen } i, \text{agen } m)(t) - 1)^2 + \sum_{\substack{i < m \\ m \leq 6}} \frac{\rho}{(d(\text{agen } i, \text{agen } m)(t))^2} dt$$

dimana  $d(\text{agen } i, \text{agen } m)$  adalah jarak agen  $i$  ke agen  $m$  dengan syarat posisi agen  $i$  dan agen  $m$  terhubung langsung oleh satu sisi dengan jarak di posisi awal dan akhir 1. Berikutnya,  $\delta, \mu, \rho$  adalah konstanta bobot. Dengan memperhatikan sistem dinamik dan fungsional ongkos maka dapat ditentukan Hamiltonian  $H$ . Selanjutnya dari Hamiltonian  $H$ , dapat ditentukan sistem Hamiltonian sebagai berikut:

untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 12$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{y}_i = v_i \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_i \text{ ada persamaannya} \\ \frac{\partial H}{\partial v_i} = p_i - \delta p_0 v_i = 0 \end{array} \right.$$

$$p_i - \delta p_0 v_i = 0 \Rightarrow v_i = \frac{p_i}{\delta p_0} = -\frac{p_i}{\delta}$$

$$\dot{y}_1 = v_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = -\frac{p_1}{\delta} \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\frac{\dot{p}_1}{\delta}$$

Jadi harus diselesaikan

$$\ddot{y}_1 = -\frac{\dot{p}_1}{\delta}$$

dengan syarat awal dan akhir

$$y_i(0) = q_{2i-1}$$

$$y_i(T) = q_{2i}$$

Sekarang diperumum untuk *swarm* multi agen dengan  $k$  anggota dimana  $k = 3, 6, 10, 15, \dots$  yang hasilnya dituliskan dalam teorema 1 berikut.

#### Teorema 3.1

Diberikan sistem multi agen integrator  $k$  anggota di  $R^2$  sebagai

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{y}_{i+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+k} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (6)$$

dengan  $k = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=1+l} \alpha$  dimana  $l = 1, 2, 3, \dots$

dengan  $\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+k} \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+k} \end{bmatrix}$  masing-masing adalah vektor posisi dan vektor kontrol agen ke  $i$ . Fungsional ongkos diberikan

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{2k} \delta v_i + \mu \sum_{\substack{i < m \\ m \leq k}} (d(\text{agen } i, \text{agen } m)(t) - 1)^2 + \sum_{\substack{i < m \\ m \leq k}} \frac{\rho}{(d(\text{agen } i, \text{agen } m)(t))^2} dt$$

dimana  $d(\text{agen } i, \text{agen } m)$  adalah jarak agen  $i$  ke agen  $m$  dengan syarat posisi agen  $i$  dan agen  $m$  terhubung langsung oleh satu sisi dengan jarak di posisi awal dan akhir 1. Berikutnya,  $\delta, \mu, \rho$  adalah konstanta bobot. Persamaan trayektori diperoleh dengan menyelesaikan

$$\ddot{y}_n = -\frac{p_n}{\delta} \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2k \quad (7)$$

dengan  $y_n(0) = q_{2n-1}$  dan  $y_n(T) = q_{2n}$

dimana  $-p_n = \frac{\partial H}{\partial y_n}$  dan  $H$  adalah

hamiltonian.

Bukti:

Dengan memperhatikan sistem dan fungsional ongkos dapat ditentukan Hamiltonian  $H$ . Selanjutnya didapat

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_n} = \dot{y}_n = v_n \\ \frac{\partial H}{\partial x_n} = -\dot{p}_n \text{ ada} \\ \frac{\partial H}{\partial v_n} = p_n - \delta p_0 v_n = 0 \end{cases}$$

$$p_n - \delta p_0 v_n = 0 \Rightarrow v_n = \frac{p_n}{\delta p_0} = -\frac{p_n}{\delta}$$

$$\dot{y}_n = v_n \Rightarrow \dot{y}_n = -\frac{p_n}{\delta} \Rightarrow \ddot{y}_n = -\frac{\dot{p}_n}{\delta}$$

Jadi kita menyelesaikan

$$\ddot{y}_n = -\frac{\dot{p}_n}{\delta}$$

dengan syarat awal dan akhir

$$y_n(0) = q_{2n-1} \\ y_n(T) = q_{2n} \quad \square$$

#### 4. HASIL SIMULASI

Hasil simulasi 3 agen dalam formasi segitiga dengan syarat

$$\begin{array}{ll} y_1(0) = 1 & y_1(5) = 26 \\ y_2(0) = 2 & y_2(5) = 27 \\ y_3(0) = 1.5 & y_3(5) = 26.5 \\ y_4(0) = 1 & y_4(5) = 18 \\ y_5(0) = 1 & y_5(5) = 18 \\ y_6(0) = 1.8660254 & y_6(5) = 18.8660254 \end{array}$$

disajikan dalam gambar 3.

Selanjutnya hasil simulasi 3 agen dalam formasi segitiga dengan syarat

$$y_1(0) = 1 \quad y_1(5) = 26.5$$

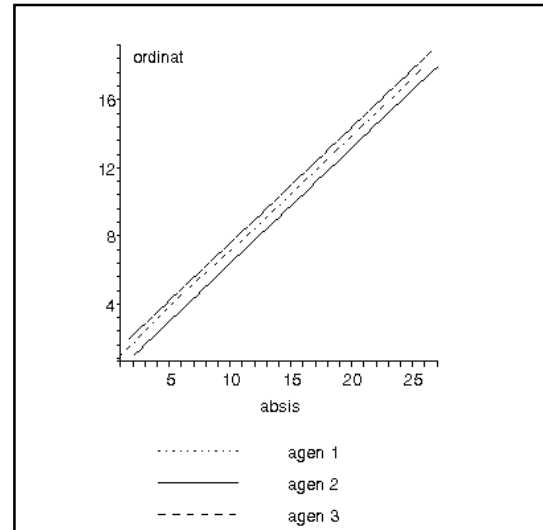
$$y_2(0) = 2 \quad y_2(5) = 26$$

$$y_3(0) = 1.5 \quad y_3(5) = 27$$

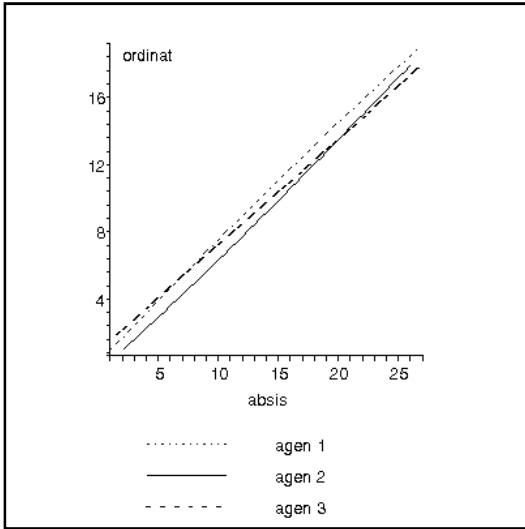
$$y_4(0) = 1 \quad y_4(5) = 18.8660254$$

$$y_5(0) = 1 \quad y_5(5) = 18$$

$y_6(0) = 1.8660254 \quad y_6(5) = 18$   
disajikan dalam gambar 4.



Gambar 3. Hasil simulasi 3 agen dengan gerak tanpa memutar



**Gambar 4.** Hasil simulasi 3 agen dengan gerakan memutar

## 5. KESIMPULAN

Model *swarm* yang diusulkan pada paper ini sudah dapat menggambarkan perpindahan segerombolan agen dari posisi awal ke posisi yang lain. Model juga sudah dapat menggambarkan, pada waktu berpindah para agen tidak bertabrakan dan tetap mempertahankan formasinya.

Dengan mengingat bahwa vektor kontrol

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+k} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (8)$$

maka perancangan kontrol dari para agen dapat diperoleh dari persamaan (6) dan sistem persamaan (7). Kontrol yang kami rancang adalah kontrol untuk masing-masing agen. Ini berbeda dengan yang dikerjakan Miswanto *et al.*, 2006 yang merancang kontrol hanya untuk satu anggota saja yaitu untuk agen yang dianggap sebagai “pemimpin” dan lintasan yang dipergunakan “pemimpin” untuk pindah sudah ditentukan, kemudian para agen lain mengikuti lintasan tersebut.

Kelemahan model *swarm* pada paper ini adalah tidak adanya orientasi para agen. Karena itu, pada penelitian selanjutnya kami akan mempertimbangkan adanya orientasi. Selain posisi, orientasi para agen perlu dimasukkan dalam sistem dinamik. Orientasi awal dan akhir perlu dimasukkan juga masing-masing dalam syarat awal dan

syarat akhir. Kami juga akan mengerjakan untuk model-model wahana transportasi seperti gerobag, mobil, kapal dan pesawat udara.

Stabilitas solusi untuk masalah ini, dijamin, karena model yang dikerjakan adalah model dengan sistem yang terkontrol. Setiap sistem yang terkontrol sudah barang tentu akan terjamin kestabilan solusinya.

Hasil Penelitian yang dipaparkan di atas bila dibandingkan dengan paper-paper terkini antara lain yang disajikan oleh Breivik dkk., (2008) menyelesaikan masalah pengendalian multi wahana dengan konsep *leader-follower* sedangkan paper ini menggunakan konsep tidak adanya *leader*. Sedangkan tulisan Moshtagh dkk., (2009) dan Ahmadzadeh dkk., (2009) seperti Gazi dkk., (2007) mengambil model wahana non holonomik atau kendaraan Dubin, yang penyelesaiannya secara umum tidak diperoleh. Hal tersebut berbeda dengan model yang disajikan dalam paper ini, yaitu hasil secara umum diperoleh dan disajikan dalam Teorema 1.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ahmadzadeh, A., Motee, N., Jadbabaie, A. dan Pappas, G. (2009): Multi-vehicle path planning in dynamically changing environments, *Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation 2009*, pp.2449-2454.
- [2] Breivik, M., Hovstein, V.E., Thor I. Fossen, T.I. (2008) : Ship Formation Control: A Guided Leader-Follower Approach, *Proceeding of IFAC World Congress Seoul*
- [3] Chu, T., Wang, L. dan Chen, T., (2003), Self-Organized Motion In Anisotropic Swarms, *J. Control Theory and Applications*, Vol. 1, No. 1, 77-81.
- [4] Gazi, V. dan Passino, K.M., (2003), Stability Analysis of Swarms, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 48, No. 4, 692-697.

- [5] Gazi, V., Fidan, B., Hanay, Y.S., dan Koxsal, M.I., (2007): Aggregation, foraging, and formation control of swarms with non-holonomic agents using potential functions and sliding mode techniques, *Turk J Elec Engin*, Vol. 15, No.2.
  - [6] Miswanto, Pranoto, I., Muhammad, H. (2006), A Model of Swarm Movement with the Presence of a Leader, *Proceeding of International Conference on Mathematics and Natural Sciences*, 740-742
  - [7] Pranoto, I., Tjahjana, H., dan Muhammad, H., (2006a), Simulation of Swarm Modeling Through Optimal Control, *Proceeding of Asian Control Conference*, 800-803.
  - [8] Pranoto, I., Tjahjana, H., dan Muhammad, H., (2006b), Simulation of Swarm Modeling Through Bilinear Optimal Control, *Proceeding of International Conference on Mathematics and Statistics*, 443-450
  - [9] Moshtagh, N., Michael, N., Jadbabaie, A. dan Daniilidis, K. (2009) : Vision-Based, Distributed Control Laws for Motion Coordination of Nonholonomic Robots, *IEEE Transactions on Robotics*, vol.25, no.4, pp.851-860.
  - [10] Shi, H., Wang, L. and Chu, T., (2004), Swarming Behavior of Multi-Agent Systems, *J. Control Theory and Applications*. Vol. 2, No. 4, 313-318.
  - [11] Tjahjana, H., Pranoto, I., Muhammad, H. dan Naiborhu, J. (2006a), Swarm with Triangle Formation, *Proceeding of International Conference on Mathematics and Natural Sciences*, 778-780.
  - [12] Tjahjana, H., Pranoto, I., dan Muhamad, H., (2006b), Pemodelan perilaku *swarm* melalui kontrol optimum dengan penalti fungsi eksponensial, *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIII*, 779-784.
-

