

PENENTUAN SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BKdV DENGAN METODE BEDA HINGGA

Sehah dan J. Aminuddin

Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Jenderal Soedirman
Jalan dr. Suparno, No. 61 Karangwangkal Purwokerto, Jawa Tengah, 53123.
e-mail: sehah@unsoed.ac.id; jamrud_uh96@yahoo.com

ABSTRACT

The innovative knowledge for modelling of the wave propagation is solitary waves. The dynamical model of solitary wave represented in Korteweg de Vrise (KdV) equation form. In this modelling assumed that the KdV equation has not perturbation sign, so called Basic Korteweg de Vrises (BKdV) equation. This modelling begins from expressing of the BKdV equation into to discrete form as its linear form using implicit scheme for finite difference method. Then, it linear form constructed into matrix form. The solution of matrix form determined using Gauss-Jordan method for resulting of the numerical solution of the BKdV equation. numerical solution was representing on the surface-graphic for the wave envelope as representation of the dynamical non linear in the water. This modelling results indicating that the wave envelope $\eta(\xi, t)$ was has distortion of initial amplitude (ξ_0) on longstanding of time (t). It indicate that the fluid energy was has distortion on longstanding of time.

Key Word: Soliton, KdV, Numerical, Wave, Envelope.

ABSTRAK

Pengetahuan inovatif untuk mengetahui model dinamika gelombang laut adalah menganggapnya sebagai deretan pulsa stabil. Fenomena tersebut lazim dikenal dengan gelombang soliton (solitary wave). Model dinamika solitary wave direpresentasikan dalam bentuk persamaan Basic Korteweg de Vrises (KdV). Dalam pemodelan yang telah dilakukan, Persamaan KdV dianggap tidak mengalami gangguan perturbatif atau lazim dikenal dengan persamaan Basic Korteweg de Vrises (BKdV). Langkah awal pemodelan dimulai dengan diskritisasi persamaan BKdV dengan metode beda hingga skema implisit untuk mendapatkan matriks sebagai representasi linear persamaan BKdV. Solusi matriks ditentukan dengan menggunakan metode Gauss-Jordan untuk mendapatkan solusi numerik persamaan BKdV. Solusi numerik persamaan BKdV dinyatakan dalam bentuk grafik envelope gelombang sebagai representasi dinamika non linear dalam air. Hasil pemodelan menunjukkan bahwa envelope gelombang $\eta(\xi, t)$ mengalami distorsi amplitudo awal (ξ_0) pada waktu (t). Hal tersebut mengindikasikan bahwa perambatan partikel air akan mengalami distorsi berdasarkan lama perambatan.

Kata Kunci: Soliton, KdV, Numerik, Gelombang, Envelope

PENDAHULUAN

Pengetahuan inovatif untuk mengkaji model dinamika dari gelombang laut adalah menganggapnya sebagai deretan pulsa stabil. Fenomena tersebut lazim dikenal dengan nama gelombang soliton (solitary wave). Model dinamika solitary wave direpresentasikan dalam bentuk Persamaan Korteweg-de Vrises atau KdV [1,2,3]. Karakteristik gelombang soliton dalam air dapat diketahui dengan

melakukan modifikasi terhadap suku-suku gangguan (perturbatif) persamaan KdV [4,5].

Metode yang dapat digunakan untuk memodelkan dinamika gelombang laut dengan persamaan KdV adalah metode beda hingga yang terbukti dapat digunakan meminimalkan error numerik akibat kesalahan pemotongan (truncation error) dari deret Taylor, serta perhitungannya dikerjakan dengan iterasi berurutan

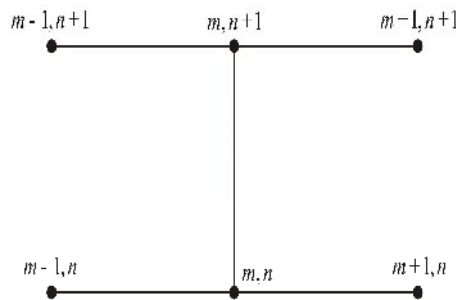
sehingga sangat memudahkan proses pemrograman komputer [6]. Pemrograman komputer dengan metode beda hingga skema implisit dikerjakan dengan *software* MATLAB 7.0 karena memudahkan proses perhitungan dan visualisasi. *Software* MATLAB 7.0 digunakan untuk memecahkan operasi matematika secara langsung sehingga mereduksi kerumitan pemrograman, serta memvisualisasikan data dalam bentuk grafik 3D sehingga memudahkan dalam pemodelan dinamika perambatan gelombang dari laut lepas hingga memasuki tepi pantai [7,8].

METODE PENELITIAN

Metode numerik yang digunakan dilakukan dengan prosedur [9-11]:

- 1) Diskritisasi persamaan BKdV biasa dengan skema implisit seperti pada Gambar 1 untuk memperoleh rumus iterasi seperti pada persamaan (1).

$$\begin{aligned}
 u &= u_{m,n} \text{ atau } u = u_{m,n+1} \\
 u_t &= \frac{u_{m,n+1} - u_{m-1,n}}{2\Delta t} \\
 u_x &= \frac{u_{m+1,n+1} + u_{m-1,n+1}}{2\Delta x} \\
 u_{xx} &= \frac{u_{m-1,n+1} - 2u_{m,n+1} + u_{m+1,n+1}}{\Delta x^2} \\
 u_{xxx} &= \frac{-u_{m-2,n+1} + 3u_{m-1,n+1} - u_{m,n+1} + u_{m+1,n+1}}{\Delta x^3}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Gambar 1. Skema implisit metode beda hingga

- 2) Mengkonstruksi bentuk diskrit persamaan KdV biasa menjadi bentuk matriks persamaan (2)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & \dots & u_{2,n} \\ u_{3,1} & \dots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m,1} & \dots & u_{m,n} \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & \dots & d_{2,n} \\ d_{3,1} & \dots & d_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m,1} & \dots & d_{m,n} \end{bmatrix}
 \tag{2}$$

- 3) Membuat program perhitungan untuk menentukan solusi matriks dengan metode Gauss-Jordan sebagai konstruksi umum matriks seperti persamaan (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & \dots & u_{2,n} \\ u_{3,1} & \dots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m,1} & \dots & u_{m,n} \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & \dots & d_{2,n} \\ d_{3,1} & \dots & d_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m,1} & \dots & d_{m,n} \end{bmatrix}
 \tag{3}$$

- 4) Membuat gambar 3D matriks elemen u_i sebagai solusi numerik persamaan KdV.

- 5) Melakukan analisis terhadap solusi numerik persamaan KdV sebagai model dinamika gelombang soliton dalam air

HASIL DAN BAHASAN

Solusi 1-soliton persamaan KdV merupakan representasi model perambatan gelombang stabil. Langkah awal yang

harus dilakukan adalah menyatakan parameter ξ dari persamaan KdV

$$\xi_t = \xi \xi_x + \xi_{xxx}, \quad (4)$$

dalam bentuk

$$\xi(x, t) = \eta(x + \omega t) \equiv \eta(\zeta), \quad (5)$$

dengan ω menyatakan parameter kecepatan. Berdasarkan *ansatz* pada persamaan (5), maka persamaan (4) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\omega \eta' - \eta \eta' - \eta''' = 0. \quad (6)$$

Integrasi langsung terhadap persamaan (6) menghasilkan

$$\omega \eta - \frac{1}{2} \eta^2 - \eta'' = A, \quad (7)$$

dengan A adalah konstanta tak tentu. Dengan menyatakan

$$\frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{d\eta} = \eta' \frac{d\eta}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\eta} = \eta' \eta'' \frac{1}{\eta'} = \eta'', \quad (8)$$

maka persamaan (7) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{d\eta} = \omega \eta - \frac{1}{2} \eta^2 - A. \quad (9)$$

Integrasi terhadap parameter η terhadap persamaan (9) menghasilkan

$$\frac{1}{2} \eta^2 = \frac{1}{2} \omega \eta^2 - \frac{1}{6} \eta^3 - A\eta + B, \quad (10)$$

dengan B adalah konstanta tak tentu yang baru. Dengan menggunakan beberapa syarat batas, yaitu: $(\eta, \eta', \eta'') \rightarrow 0$ pada $\zeta \rightarrow \infty$, $A = 0$ pada persamaan (7), $B = 0$ pada persamaan (8) dan

$$\eta^2 = \eta^2 \left(\omega - \frac{1}{3} \eta \right) \quad (11)$$

serta melibatkan

$$\zeta = \int \frac{d\eta}{\eta'} = \sqrt{3} \int \frac{d\eta}{\eta \sqrt{3\omega - \eta}}. \quad (12)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan *ansatz*

$$\eta = 3\omega \operatorname{sech}^2 \vartheta \quad (13)$$

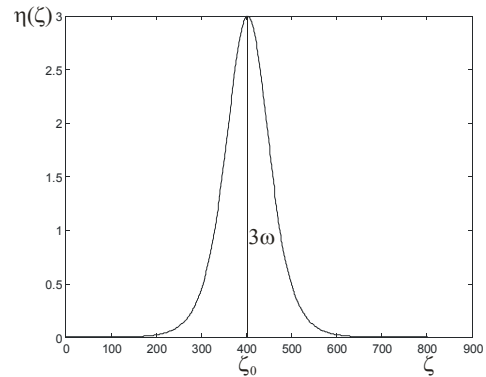
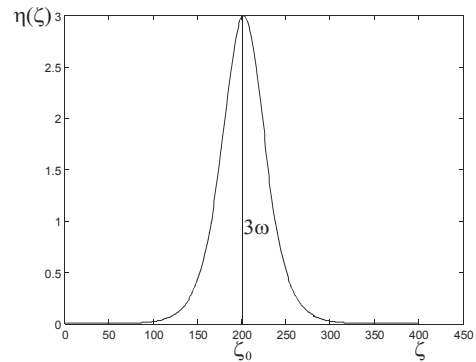
dan prinsip aljabar

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int d\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \vartheta, \quad (14)$$

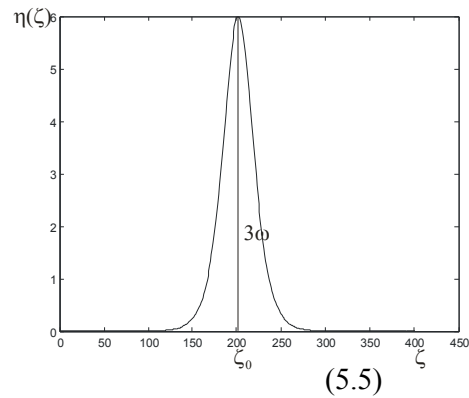
maka diperoleh persamaan

$$\eta(\zeta) = 3\omega \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\omega} (\zeta - \zeta_0) \right\}. \quad (15)$$

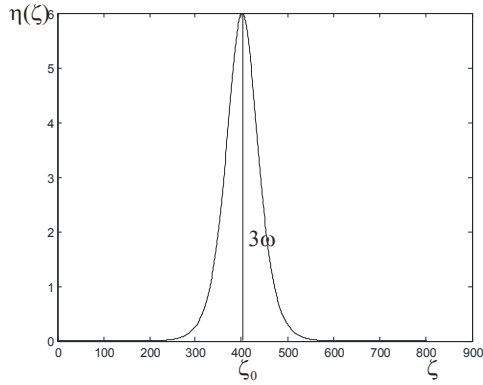
Persamaan (15) merupakan solusi eksak persamaan KdV yang merepresentasikan fenomena non dispersif pada proses perambatan gelombang. Dengan menggunakan angka-angka acak sebagai variasi amplitudo (ξ) pada bahasa pemrograman MATLAB 7.0 maka diperoleh model gelombang seperti pada Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4 [12,13].



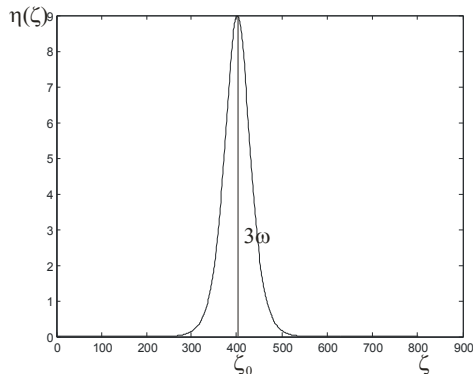
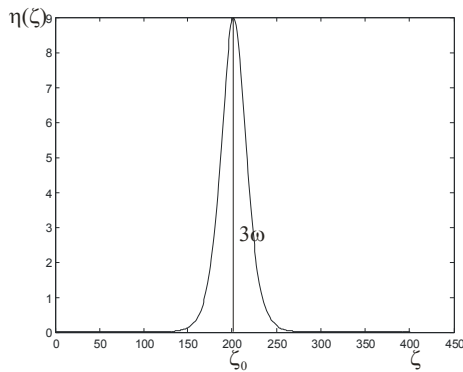
Gambar 2. Gelombang soliton dengan $\omega = 1$



$$(5.5)$$



Gambar 3. Gelombang soliton dengan panjang $\omega = 2$



Gambar 4. Gelombang soliton dengan panjang $\omega = 3$

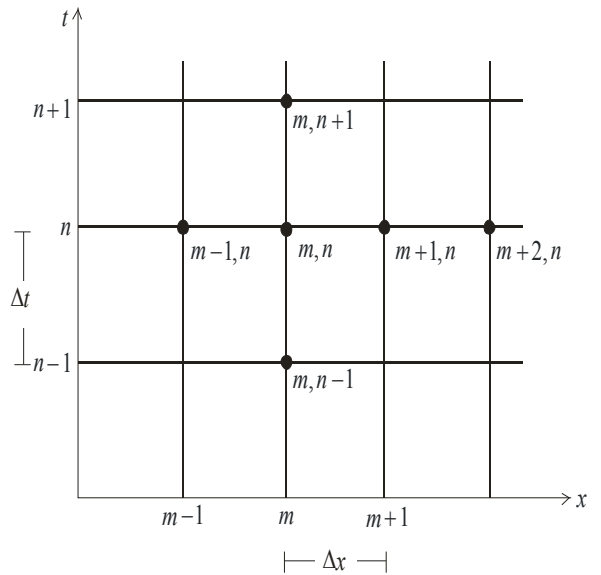
Bentuk diskrit persamaan BKdV merupakan aproksimasi dengan metode beda hingga. Jaringan titik hitungan yang digunakan adalah skema implisit seperti pada Gambar 5.

Langkah awal diskritisasi dilakukan dengan menyatakan persamaan BKdV dalam bentuk notasi biasa, yaitu

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Dengan menggunakan skema titik hitungan pada Gambar 5, serta u adalah sebuah fungsi konstan, maka persamaan (16) mempunyai bentuk diskrit

$$\left(\frac{\eta_{m+2,n} - 3\eta_{m+1,n} + 3\eta_{m,n} - \eta_{m-1,n}}{\Delta x^3} \right) + \eta \left(\frac{\eta_{m+1,n} - \eta_{m,n}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\eta_{m,n} - \eta_{m,n-1}}{\Delta t} \right) = 0, \quad (17)$$



Gambar 5. Skema implisit persamaan KdV

$$\eta_{m+2,n} - 3\eta_{m+1,n} + 3\eta_{m,n} - \eta_{m-1,n} + \Delta x^2 \eta (\eta_{m+1,n} - \eta_{m,n}) - \frac{\Delta x^3}{\Delta t} (\eta_{m,n} - \eta_{m,n-1}) = 0. \quad (18)$$

Dengan variabel $\alpha = \Delta x$ dan $\beta = \Delta t$, maka persamaan (18) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\eta_{m+2,n} - 3\eta_{m+1,n} + 3\eta_{m,n} - \eta_{m-1,n} + \alpha^2 \eta \eta_{m+1,n} - \alpha^2 \eta \eta_{m-1,n} - \frac{\alpha}{\beta} \eta_{m,n} + \frac{\alpha}{\beta} \eta_{m,n-1} = 0 \quad (19)$$

Jika persamaan (19) dideritkan dari $m = 1$ hingga $m = M$, serta mengaturnya dalam bentuk konfigurasi indeks paling rendah ke indeks paling tinggi, maka diperoleh

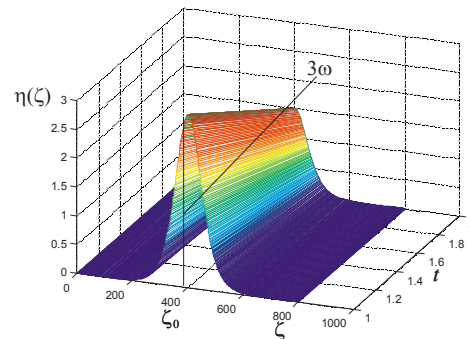
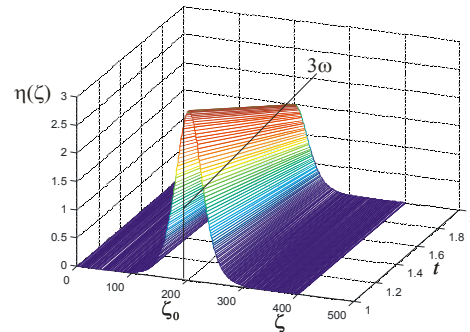
$$\begin{aligned}
 & -\eta_{0,n} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta\right) \eta_{1,n} - (3 - \alpha^2 \eta) \eta_{2,n} + \eta_{3,n} = \frac{\alpha}{\beta} \eta_{1,n+1} \\
 & -\eta_{1,n} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta\right) \eta_{2,n} - (3 - \alpha^2 \eta) \eta_{3,n} + \eta_{4,n} = \frac{\alpha}{\beta} \eta_{2,n+1} \\
 & -\eta_{2,n} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta\right) \eta_{3,n} - (3 - \alpha^2 \eta) \eta_{4,n} + \eta_{5,n} = \frac{\alpha}{\beta} \eta_{3,n+1} \\
 & -\eta_{3,n} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta\right) \eta_{4,n} - (3 - \alpha^2 \eta) \eta_{5,n} + \eta_{6,n} = \frac{\alpha}{\beta} \eta_{4,n+1} \quad (20) \\
 & -\eta_{4,n} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta\right) \eta_{5,n} - (3 - \alpha^2 \eta) \eta_{6,n} + \eta_{7,n} = \frac{\alpha}{\beta} \eta_{5,n+1} \\
 & \vdots \\
 & -\eta_{M-1,n} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta\right) \eta_{M,n} - (3 - \alpha^2 \eta) \eta_{M+1,n} + \eta_{M+2,n} = \frac{\alpha}{\beta} \eta_{M,n+1}
 \end{aligned}$$

Konfigurasi persamaan (20) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks untuk memudahkan pemrograman sehingga diperoleh bentuk

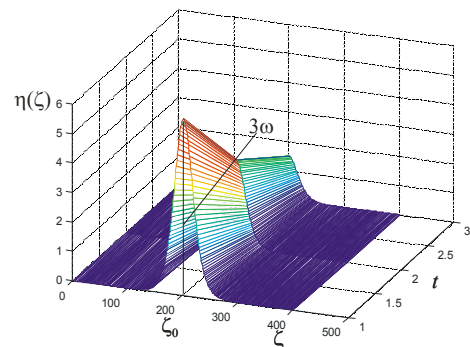
$$\begin{bmatrix}
 \frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta & \alpha^2 \eta - 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & \frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta & \alpha^2 \eta - 3 & 1 & \ddots & \vdots \\
 0 & 1 & \frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta & \alpha^2 \eta - 3 & \ddots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{\alpha}{\beta} + 3 - \alpha^2 \eta & \alpha^2 \eta - 3
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 \eta_{1,n} \\
 \eta_{2,n} \\
 \eta_{3,n} \\
 \vdots \\
 \eta_{M,n}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{\alpha}{\beta} \eta_{1,n+1} + \eta_{0,n} \\
 \frac{\alpha}{\beta} \eta_{2,n+1} \\
 \frac{\alpha}{\beta} \eta_{3,n+1} \\
 \vdots \\
 \frac{\alpha}{\beta} \eta_{M,n+1}
 \end{bmatrix} \quad (21)$$

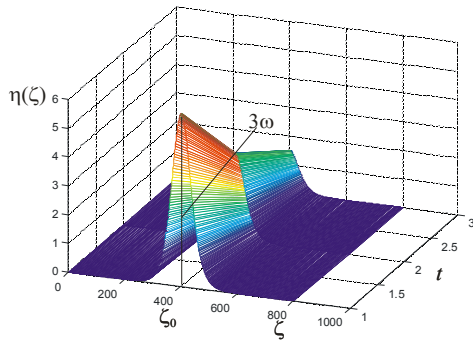
Solusi persamaan (21) sebagai pasangan antara elemen matriks $\eta_{M,n}$ dan $\eta_{M,n+1}$, merupakan solusi numerik persamaan KdV. Solusi tersebut dihitung dengan menggunakan metode Gauss-Jordan dengan bahasa pemrograman MATLAB 7.0. Parameter visualisasi yang digunakan adalah amplitudo gelombang yang bervariasi (ξ_0) pada Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4. Selain itu, parameter tetap dalam perhitungan ini adalah $u = 1$ sebagai konstanta umum, $\xi = 200$ dan 400 sebagai amplitudo awal, $\alpha = 3600$ sebagai konstanta waktu domain, dan $\beta = 0,01$ sebagai konstanta spasi domain. Parameter pilihan: frekuensi (ω) dan waktu penjarangan (t) sebagai konstanta yang bervariasi. Solusi numerik dari persamaan BKdV diperlihatkan pada Gambar 6, Gambar 7, dan Gambar 8.

Menurut model tersebut dapat diketahui bahwa paket gelombang mengalami distorsi pada waktu yang sangat panjang. Solusi tersebut mempunyai model karakteristik yang sama dengan referensi [1,2,3]. Hal tersebut mengindikasikan bahwa perambatan partikel air akan mengalami distorsi berdasarkan lama perambatan

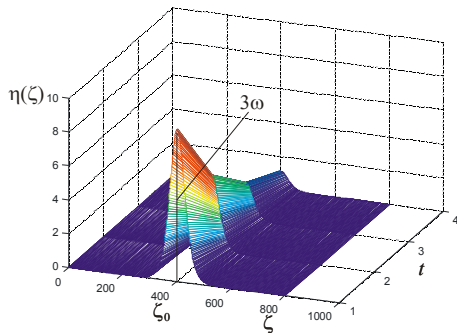
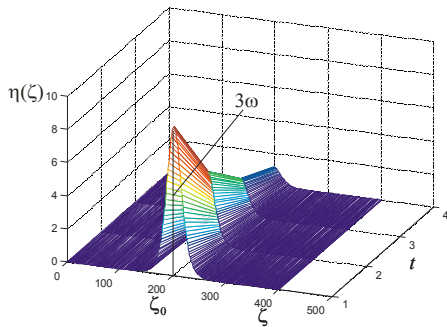


Gambar 6. Gelombang soliton dengan $\omega = 1$ dan $t = 2$





Gambar 7. Gelombang soliton dengan $\omega = 2$ dan $t = 3$



Gambar 8. Gelombang soliton dengan $\omega = 3$ dan $t = 4$

KESIMPULAN

Hasil pemodelan menunjukkan bahwa *envelope* gelombang $\eta(\xi, t)$ mengalami distorsi amplitudo awal (ξ_0) pada waktu (t). Hal ini mengindikasikan bahwa perambatan partikel air akan mengalami distorsi berdasarkan lama perambatannya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih yang besar disampaikan kepada DP2M DIRJEN DIKTI DEPDIKNAS RI atas biaya yang diberikannya. Terima kasih juga disampaikan kepada Ketua dan Pengelola Laboratorium Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumenasi (THEP&I) dan Laboratorium Oseanografi Fisis ITB, serta Laboratorium Fisika Komputasi UNSOED atas bantuan dan dukungan fasilitas yang telah diberikan dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Lamb JGL, 1980, *Elements on soliton theory*, John Wiley & Sons. Inc, New York, USA.
- [2]. *Malfiet* W, 1992, *Solitary wave Solutions of Nonlinear Wave Equation*, Am. J. Phys. **60**, 650. USA.
- [3]. Johnson RS, 1994, *Solitary wave, solution and shelf evolution over variable depth*, J. fluid. Mech. 276, 125-138, Cambridge Univer-sity, USA.
- [4]. Soewono E, Andonowati, SR. *Pudjaprasetya*, HJ. Wospakrik. dan FP. Zen., 2000, *Soliton dan Berbagai Solusi Terkait dari Persamaan Tipe Korteweg-de Vries*, Proc. ITB Vol. 32, No. 2, Bandung, Indonesia.
- [5]. Li Y and F. Raichlen, 2002, *Non-Breaking and Breaking Solitary Wave Run-Up*, J. fluid. Mech., 456,295-318, Cambridge University, USA.
- [6]. Pirozzoli S, 2007, *Performance Analysis and Optimization of Finite Difference Scheme for Wave Propagation Problems*, J. Comp. Phys, Vol. 222, 809-831.
- [7]. *Martha* LA and PB. James, 1992, *Mathematica by Example*, Academic Press. Inc, San Diego, USA
- [8]. Lindfield G. and J. Penny, 1995, *Numeri-cal Methods Using*

- MATLAB**, Ellis Horwood Limited, New York, USA.
- [9]. Aminuddin J. and FP. Zen, 2006, *Application of Finite Difference Methods for Soling Nonlinear Schrödinger Equation*, Workshop on Theoretical Physics and 70th Birthday of Prof. Muslim, UGM, Yogyakarta, Indonesia.
- [10]. Latief H, S. Hadi and F. Imamura, 2002, *Numerical Model for Tsunami Inundation Area and Its Sediment Transport in Pancer Bay*, Inter-national W/S on Tsunami Risk and Its reduction in the Asia-Pasific, ITB, Indonesia.
- [11]. Groesen VE and Jager EM, 1994, *Mathematical structures in continuous dynamical systems, in series: Studies in Mathematical Physics*, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, Holland.
- [12]. Jose VG and JS. Eugene, 2002, *Classical Dynamics: a contemporary approach*, Cambridge University Press, New York, USA.
- [13]. Kataoka T and M. Tsutahara, 2004, *Tranverse Instability of Surface Solitary Wave*, J. fluid. Mech. 512, 211-221, Cambridge University, US