J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol.14, No. 2, 143-148, Januari 2018

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Distribusi Normal Multivariat

Husty Serviana Husain[1]

Abstrak

Pada pengendalian proses univariat berdasarkan variabel, biasanya digunakan model distribusi normal untuk mengamati kualitas proses dari waktu ke waktu.
Fungsi kepadatan peluangnya (fkp) adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2, -\infty \le x \le \infty,$$

dimana μ adalah meannya dan σ^2 adalah variansinya. Dalam kenyataannya, seringkali kualitas proses ditentukan oleh lebih dari satu karakteristik yang saling berkorelasi. Dalam hal ini kita bisa saja melakukan pengendalian terhadap masing-masing karakteristik satu-persatu. Akan tetapi hal ini akan menimbulkan banyak sekali kesalahan seperti dikemukakan Montgomery [4]. Oleh karena itu pengendalian proses harus melibatkan semua karakteristik sekaligus. Untuk itu digunakan distribusi normal mulitivariat. Distribusi ini dan beberapa sifatnya merupakan topik bahasan dalam tulisan ini.

Kata Kunci: Distribusi Normal Bivariat, Statistical Proces Control .

1. Pendahuluan

Pengendalian proses secara statistik (*Statistical Proces Control* atau disingkat SPC), dibagi ke dalam dua jenis yaitu SPC univariat dan SPC mulitivariat. Dalam SPC univariat hanya satu variabel karakteristik mutu yang dikaji. Kenyataannya, banyak sekali proses yang ditentukan oleh sejumlah karateristik mutu yang terpadu, yang satu sama lainnya berkorelasi. Dalam hal ini, digunakan SPC multivariat. Dengan asumsi bahwa proses memiliki ditribusi normal multivariat. Sehingga tulisan ini akan fokus pada teori distribusi normal multivariat, sebagai distribusi yang digunakan dalam SPC multivariat.

2. Distribusi Normal Multivariat

2.1. Definisi Distribusi Normal Multivariat

Vektor random yang terdiri atas *p* komponen $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_p)^t$ dikatakan berdistribusi normal multivariat dengan vektor mean $\vec{\mu}$ dan matriks variansi-kovariansi Σ yang definit positif, jika fungsi kepadatan peluang bersama $X_1, X_2, ..., X_p$ adalah:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^t \Sigma^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu})\right\} \quad (1)$$

[1] *Universitas Pendidikan Indonesia, email : chery_husty@yahoo.com*

dengan $\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_p\right)^t$ di R^p. Untuk selanjutnya vektor random $\overrightarrow{X}$ yang berdistribusi normal *p*-variat tersebut diberi lambang $\overrightarrow{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$. Berikut ini dikemukakan fungsi pembangkit momen dari $\overrightarrow{X}$ yang akan digunakan dalam pengkajian distribusi normal multivariat selanjutnya.

2.2. Teorema 1 Distribusi Normal Multivariat

Jika $\overrightarrow{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$, maka fungsi pembangkit momen dari $\overrightarrow{X}$, ditulis $M_{\overrightarrow{X}}\left(\vec{t}\right)$, dengan $\vec{t} = \left(t_1, t_2, ..., t_p\right)^t$ adalah $M_{\overrightarrow{X}}\left(\vec{t}\right) = \exp\left(\vec{t}^t \vec{\mu} + \frac{1}{2}\vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right)$.

Bukti.

$$M_{\overrightarrow{X}}\left(\vec{t}\right) = \exp\left(\vec{t}^t \vec{\mu} + \frac{1}{2}\vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right).$$

Karena $\overrightarrow{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$, maka

$$M_{\overrightarrow{X}}\left(\vec{t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{p}{2}} \left|\Sigma\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{\vec{t}^t \vec{x} - \frac{1}{2}\left(\vec{x} - \vec{\mu}\right)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} k.\exp\left\{\vec{t}^t \vec{x} - \frac{1}{2}\left(\vec{x}\Sigma^{-1}\vec{x} - \vec{x}^t \Sigma^{-1}\vec{\mu} - \vec{\mu}^t \Sigma^{-1}\vec{x} + \vec{\mu}^t \Sigma^{-1}\vec{\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{\mu}^t \vec{t} - \vec{\mu}^t \vec{t}\right)\right.$$

$$\left.; + \left(\vec{t}^t \Sigma \vec{t} - \vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right) + \left(\vec{t}^t \vec{\mu} - \vec{t}^t \vec{\mu}\right)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_p \text{ dimana } k = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{p}{2}} \left|\Sigma\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} k.\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}\Sigma^{-1}\vec{x} - \vec{x}^t \Sigma^{-1}\vec{\mu} - \vec{x}^t \vec{t} - \vec{\mu}^t \Sigma^{-1}\vec{x} + \vec{\mu}^t \Sigma^{-1}\vec{\mu}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \vec{\mu}^t \vec{t} - \vec{t}^t \vec{x} + \vec{t}^t \vec{\mu} + \vec{t}^t \Sigma \vec{t} + \frac{1}{2}\left(\vec{t}^t \vec{\mu}^t + \vec{t}^t \Sigma \vec{t} + \vec{t}^t \vec{\mu}\right)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} k.\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{x} - \vec{\mu}\Sigma\vec{t}\right)^t \Sigma^{-1}\left(\vec{x} - \vec{\mu} - \Sigma\vec{t}\right) + \frac{1}{2}\left(2\vec{t}^t \vec{\mu} + \vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} k.\exp\left\{\frac{1}{2}\left(2\vec{t}^t \vec{\mu} + \vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{x} - \vec{\mu} - \Sigma\vec{t}\right)^t \Sigma^{-1}\left(\vec{x} - \vec{\mu}\Sigma\vec{t}\right)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} k.\exp\left(\vec{t}^t \vec{\mu} + \frac{1}{2}\vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{x} - \vec{\mu} - \Sigma\vec{t}\right)^t \Sigma^{-1}\left(\vec{x} - \vec{\mu}\Sigma\vec{t}\right)\right) dx_1 dx_2 ... dx_p$$

$$= \exp\left(\vec{t}^t \vec{\mu} + \frac{1}{2}\vec{t}^t \Sigma \vec{t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{p}{2}} \left|\Sigma\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{x} - \vec{\mu} - \Sigma\vec{t}\right)^t \Sigma^{-1}\left(\vec{x} - \vec{\mu}\Sigma\vec{t}\right)\right\} dx_1 dx_2 ... dx_p$$

Integral di ruas kanan bernilai 1, sebab integrannya merupakan fungsi kepadatan peluang dari vektor random yang berdistribusi $N_p\left(\left(\vec{\mu}+\Sigma\vec{t}\right),\Sigma\right)$. Oleh karena itu fungsi pembangkit momen dari $\vec{X}$ adalah $M_{\vec{x}}\left(\vec{t}\right)=\exp\left(\vec{t}^{\,t}\vec{\mu}+\frac{1}{2}\vec{t}^{\,t}\Sigma\vec{t}^{\,t}\right)$. ■

2.3. Teorema 2 Distribusi Normal Multivariat

Diketahui $\vec{X}\sim N_p(\vec{\mu},\Sigma)$ dengan Σ definit positif. Jika C_{pxp} suatu matriks non singular dan $\vec{a}$ suatu vektor skalar di R^p, maka $\vec{Y}=C\left(\vec{X}-\vec{a}\right)\sim N_p\left(C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right),C\Sigma C^t\right)$.

Bukti.

Karena $\vec{X}\sim N_p(\vec{\mu},\Sigma)$, maka PDF dari $\vec{X}$ adalah

$$f\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{x}-\vec{\mu}\right)^t\Sigma^{-1}\left(\vec{x}-\vec{\mu}\right)\right),\vec{x}\in R^p$$

Karena C_{pxp} non singular, maka $\vec{X}=C^{-1}\vec{Y}+\vec{a}$. Dengan demikian, PDF dari $\vec{Y}$ adalah $g\left(\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\left(\vec{y}\right)\right)\operatorname{mod}(J)$, dengan $\operatorname{mod}(J)$ adalah nilai mutlak dari deterrminan Jacobian transformasi J. Jadi,

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & . & . & \frac{\partial x_1}{\partial y_p}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & . & . & \frac{\partial x_2}{\partial y_p}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ \frac{\partial x_p}{\partial y_1} & \frac{\partial x_p}{\partial y_2} & . & . & \frac{\partial x_p}{\partial y_p}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C^{11} & C^{12} & . & . & C^{1p}\\ C^{21} & C^{22} & . & . & C^{2p}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ C^{p1} & C^{p2} & . & . & C^{pp}\end{vmatrix}=\left|C^{-1}\right|=\frac{1}{|C|}$$

Akibatnya,

$$g\left(\vec{y}\right)=f\left(C^{-1}\vec{y}+a\right)\operatorname{mod}\left(\frac{1}{|C|}\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(C^{-1}\vec{y}+\vec{a}\right)-\vec{\mu}\right)^t\Sigma^{-1}\left(C^{-1}\vec{y}+\vec{a}-\vec{\mu}\right)\right)\operatorname{mod}\left(\frac{1}{|C|}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(C^{-1}\vec{y}-\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)^t \Sigma^{-1}\left(C^{-1}\vec{y}-\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right)\mathrm{mod}\left(\frac{1}{|C|}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(C^{-1}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right)^t \Sigma^{-1} C^{-1}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right)\mathrm{mod}\left(\frac{1}{|C|}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)^t \left(C^{-1}\right)^t \Sigma^{-1} C^{-1}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right)\mathrm{mod}\left(\frac{1}{|C|}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)^t \left(C\Sigma C^t\right)^{-1}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{|C||C|}}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)^t \left(C\Sigma C^t\right)^{-1}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{|C||C^{'}|}}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|C\Sigma C^t|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)^t \left(C\Sigma C^t\right)^{-1}\left(\vec{y}-C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right)\right)\right), \vec{y}\in R^p$$

Ini adalah PDF dari vektor acak berdistribusi $N_p\left(C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right), C\Sigma C^t\right)$. Dengan demikian $\vec{Y} = C\left(\vec{X}-\vec{a}\right) \sim N_p\left(C\left(\vec{\mu}-\vec{a}\right), C\Sigma C^t\right)$. ■

2.4. Teorema 3 Distribusi Normal Multivariat

Misalkan $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$ dengan Σ non singulir dan $\vec{X}$ merupakan super posisi $\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vec{X}^{(2)} \end{pmatrix}$ dimana $\vec{X}^{(1)}$ dan $\vec{X}^{(2)}$ berturut-turut berdimensi *q* dan *p* – *q*. Maka vektor random $\vec{X}^{(1)}$ dan $\vec{X}^{(2)}$ independen jika dan hanya jika matriks kovariansi antara $\vec{X}^{(1)}$ dan $\vec{X}^{(2)}$ adalah $\Sigma_{12} = 0$ (matriks nol).

Bukti.

Kita tuliskan $\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_q \end{pmatrix}$ dan $\vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_{q+1} \\ X_{q+2} \\ . \\ . \\ X_p \end{pmatrix}$.

(i) Misalkan $\vec{X}^{(1)}$ dan $\vec{X}^{(2)}$ independen. Jadi untuk setiap k = 1,2,...,q dan setiap m = 1,2,...,(p-q), variabel-variabel random X_k dan X_{q+m} adalah

$$\begin{aligned}\sigma_{k(q+m)} &= E\left[\left(X_k-\mu_k\right)\left(X_{q+m}-\mu_{q+m}\right)\right]\\ &= E\left[\left(X_k-\mu_k\right)\right]E\left[\left(X_{q+m}-\mu_{q+m}\right)\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

Karena ini berlaku untuk setiap k dan m, maka

$$\Sigma_{12}=\begin{pmatrix}\sigma_{1(q+1)} & \sigma_{1(q+2)} & . & . & \sigma_{1p}\\ \sigma_{2(q+2)} & \sigma_{2(q+2)} & . & . & \sigma_{2p}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ \sigma_{q(q+1)} & \sigma_{q(q+2)} & . & . & \sigma_{qp}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & . & . & 0\\ 0 & 0 & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & 0\end{pmatrix}$$

Jadi Σ_{12} adalah matriks nol

(ii) Misalkan $\Sigma_{12}=0$. Maka matriks variansi-kovariansi dari vektor random $\vec{X}$, yakni Σ, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{pmatrix} \text{ dimana } \Sigma_{21}=\left(\Sigma_{12}\right)^t=0.$$

Karena $\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{pmatrix}$, maka bentuk kuadrat $Q=\left(\vec{X}-\vec{\mu}\right)^t\Sigma^{-1}\left(\vec{X}-\vec{\mu}\right)$ dapat pula ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}Q &= \begin{pmatrix}\vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\\ \vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\\ \vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}\\ &= \left(\left(\vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\right)^t\left(\vec{x}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)}\right)^t\right)\begin{pmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\\ \vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(2)}\end{pmatrix}\\ &= \left(\vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\right)^t\Sigma_{11}^{-1}\left(\vec{x}^{(1)}-\vec{\mu}^{(1)}\right)+\left(\vec{x}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)}\right)^t\Sigma_{22}^{-1}\left(\vec{x}^{(2)}-\vec{\mu}^{(2)}\right)\\ &= Q_1+Q_2\end{aligned}$$

dimana Q_1 dan Q_2 berturut-turut menyatakan suku pertama dan kedua. Selanjutnya karena $|\Sigma|=|\Sigma_{11}||\Sigma_{22}|$, maka f.k.p dari $\vec{X}$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$f\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{p}{2}}\left|\Sigma\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}Q\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{p}{2}}\left|\Sigma_{11}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}Q_1\right)\right\}\left\{\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{p-q}{2}}\left|\Sigma_{22}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}Q_2\right)\right\}$$

Sedangkan fungsi yang di dalam tanda kurawal pertama dan kedua berturut-turut merupakan f.k.p dari $X^{(1)}$ dan dari $\vec{X}^{(2)}$. Jadi, $f\left(\vec{x}\right)=f_1\left(\vec{x}^{(1)}\right)f_2\left(\vec{x}^{(2)}\right)$ dengan f_1 dan f_2 adalah f.k.p marginal dari $X^{(1)}$ dan dari $\vec{X}^{(2)}$. Ini berarti $\vec{X}^{(1)}$ dan $\vec{X}^{(2)}$ independen. ■

3. Kesimpulan

Tulisan ini hanya membahas beberapa teori mengenai distribusi normal multivariat dan pembuktiannya, yang akan banyak digunakan sebagai distribusi dalam pengendalian kualitas proses statistik secara multivariat (SPC multivariat).

Daftar Pustaka

[1] Anderson T.W., 1958. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Son, New York, NY.

[2] Djauhari M.A., 1987. *Pengantar Statiska Matematika II*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Universitas Terbuka.

[3] Hoong R.V., and Craig T.A., 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*, 5th edition. Prentice Hall, Inc., New Jersey.

[4] Montgomery D.C., 2001. *Introduction to Statical Qualtiy Control*, 4th edition. John Wiley & Son, New York, NY.