APLIKASI MARKOV RANDOM FIELD PADA MASALAH INDUSTRI

Siana Halim
Dosen Fakultas Teknologi Industri, Jurusan Teknik Industri – Universitas Kristen Petra

ABSTRAK

Rantai Markov dalam proses stokastik seringkali digunakan dalam penyelesaian masalah industri khususnya dalam masalah penentuan *market share*. Dalam artikel ini akan dibahas perluasan Rantai Markov tesebut ke dalam sebuah *random field* yang disebut sebagai *Markov Random Field (MRF)* yang juga akan diaplikasikan pada masalah *market share* dengan batasan daerah pemasarannya dianggap sebagai sebuah *lattice* diskrit dan fungsi potensial yang akan digunakan adalah Potts models. Akan digunakan *Metropolis sampler* untuk menentukan kondisi stabil.

Kata kunci: proses stokastik, *Markov Random Field, Gibbs Random Field, Potts model,* Metropolis sampling.

ABSTRACT

Markov chain in the stochastic process is widely used in the industrial problems particularly in the problem of determining the market share of products. In this paper we are going to extend the one in the random field so called the Markov Random Field and applied also in the market share problem with restriction the market is considered as a discrete lattice and Pott's models are going to be used as the potential function. Metropolis sampler is going to be used to determine the stability condition.

Keywords*: stochastic process, Markov Random field, Gibbs Random Field, Potts model, Metropolis sampling.*

1. PENDAHULUAN

Rantai Markov dalam proses stokastik seringkali digunakan dalam penentuan sebuah *market share*. Dalam hal ini parameter waktu digunakan untuk menentukan perubahan ataupun besarnya *market share* yang didapat oleh sebuah produk. Untuk masalah di atas maka kernel yang digunakan pada Rantai Markov merupakan sebuah matriks probabilitas transisi, jika Rantai Markov ini memenuhi sifat ergodic maka pada *long run* akan didapat matriks probabilitas transisi yang stabil, yang menunjukkan probabilitas dari *market share* itu sendiri.

Namun jika posisi atau letak penyebaran produk yang digunakan sebagai sebuah parameter, maka Rantai Markov dalam proses stokastik di atas tidak dapat digunakan lagi, karena dimensi dari permasalahan berubah dari satu dimensi menjadi (sekurang-kurangnya) dua dimensi. Untuk itulah maka konsep dari Rantai Markov pada proses stokastik di atas harus diperluas ke dalam sebuah proses yang disebut sebagai *Markov Random Fields*.

2. *RANDOM FIELD*

Diberikan $S=\{1,2,\ldots,m\}$ yang menunjukkan *pixel* ataupun *site*. Asumsikan L_s himpunan terbatas dari diskrit label untuk tiap $s \in S$ diberikan maka ruang konfigurasi (*configuration space*) χ, dapat didefiniskan untuk setiap $x \in \chi$ sebagai

$$\chi = \prod_{s \in S} L_s$$

dimana x disebut sebagai konfigurasi.

Definisi 1. Sebuah ukuran probabilitas (*probability measure*) atau distribusi pada χ didefinisikan sebagai sebuah vektor $v = (v(x))_{x \in \chi}$ serta memiliki dua sifat, yaitu:

(i) $v(x) \geq 0 \ \forall x \in \chi$,

(ii) $\sum_{x \in \chi} v(x) = 1$

Sebuah *random field* didefinisikan sebagai sebuah distribusi Π pada χ dengan sifat positif mutlak (*strictly positive*), yaitu

$$\Pi(x) > 0, \quad \forall x \in \chi$$

2.1 *Markov Random Field*

Definisi 2. Misalkan N menunjukkan koleksi himpunan bagian dari S dengan relasi sebagai berikut

$$N := \{N(s) \subset S \mid s \in S\}$$

N disebut daerah sekitar (*neighbourhood*) dari sistem S jika memenuhi

(i) $s \notin N(s), \quad \forall s \in S$

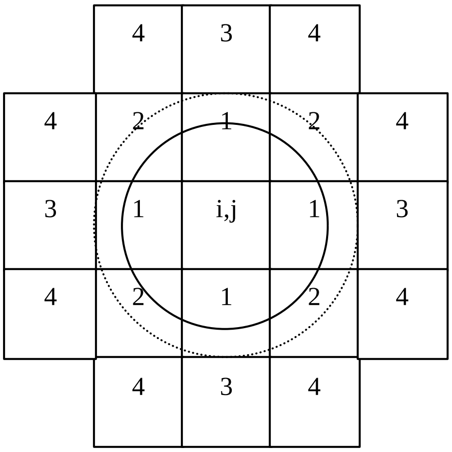
(ii) $\forall\, s, t \in S$ dengan $s \neq t$ maka $s \in N(t) \Leftrightarrow t \in N(s)$

Site $t \in N(s)$ disebut tetangga (*neigbour*) dari s, dinotasikan sebagai $<s,t>$ jika s dan t saling bertetangga.

Pada kasus regular *site grid*, himpunan S dapat dianggap sebagai himpunan bagian dari ZxZ, yaitu $S=\{(i,j) \in ZxZ \mid -m \leq i,j \leq m\}$ untuk lattice bujur sangkar dengan ukuran $(2m+1)x(2m+1)$, sedangkan daerah sekitar dari sebuah *site* (i, j) pada sebuah grid merupakan site-site di sekitar site yang dianggap sebagai titik tengah dengan radius c, yaitu

$$N(i,j) := \{(k,l) \in S \mid 0<(k-i)^2 + (l-j)^2 \leq c^2\}.$$

Namun demikian, secara umum radius lingkaran c biasanya tidak digunakan untuk menunjukkan order dari daerah sekitar, melainkan digunakan order yang meningkat sejalan dengan nilai c^2 seperti pada Gambar 1.

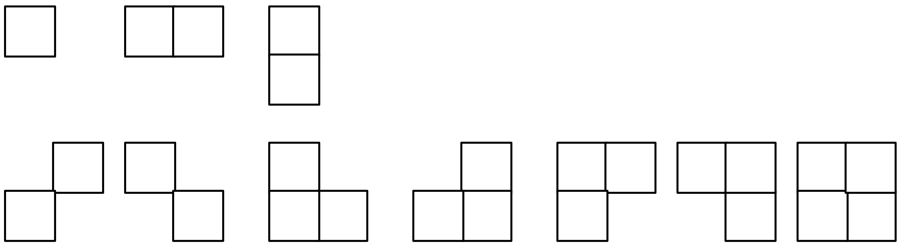


Gambar 1. Sistem Daerah Sekitar dari 1 sampai dengan 4, dengan Order 1 (*c*=*1*) dan Order 2 (*c* = $\sqrt{2}$)

Definisi 3. Sebuah himpunan bagian $C \subseteq S$ disebut sebagai *clique* terhadap daerah sekitar dari sistem N jika *C* hanya terdiri dari satu elemen atau jika dua elemen yang berbeda yang berada di *C* bertetangga. Himpunan seluruh *clique* dinotasikan sebagai ***C***.

(a)

(b)



Gambar 2. Ilustrasi dari *Clique* (a) *Clique* dari Sistem Daerah Sekitar Order 1, N^1 (b) *Clique* Tambahan untuk Sistem Daerah Sekitar Order 2, N^2

2.2 Sifat *Markov* (*Markovianity*) pada *Random Fields*

Markov Random Field merupakan generalisasi dari proses Markov yang terdapat pada teori proses stokastik. Perbedaannya terletak pada domain ketergantungan dari *random variable* yang akan didefinisikan, dimana proses Markov hanya memperlihatkan ketergantungan terhadap waktu pada satu dimensi saja, sedangkan *Markov Random Field* menunjukkan ketergantunan secara spasial.

Definisi 4. Diberikan sebuah daerah sekitar sebarang N. *Random field* ***P*** pada χ disebut *Markov Random Field (MRF)* terhadap sistem daerah sekitar N jika untuk seluruh *site* $s \in S$ karakteristik lokalnya memenuhi persamaan di bawah ini

$$P(X_s\, x_s \mid X_r = x_r,\ r \neq s) = P(X_s = x_s \mid X_r = x_r,\ r \in N(s)) \quad (1)$$

yaitu, karakteristik lokal dari sebuah *site* tunggal hanya tergantung pada nilai-nilai (label) dari daerah sekitarnya saja.

Besag membuktikan pada (Besag, 74) bahwa sebarang *random field* P ditentukan secara unik oleh karakteristik lokal dari *site* tunggalnya, persamaan (1). Teori ini indah tetapi secara praktis sangat sulit untuk menggunakan *random field* secara umum, karena metode untuk mendapakan distribusi gabungan dari nilai karakteristik lokalnya tidak diketahui. Lebih lanjut, bila diberikan sebuah fungsi, sangatlah sulit untuk menunjukkan apakah fungsi ini merupakan karakteristik lokal dai sebuah *random field*.

Kelemahan-kelemahan di atas berubah ketika muncul sebuah teori oleh Hammersley-Clifford pada tahun 1971. Teori ini memungkinkan untuk menentukan sebuah MRF dalam bentuk fungsi potensial dari distribusi dari *Random Field Gibbs*.

2.3 *Gibbs Random Fields*

Definisi 5. Sebuah *random field* P pada χ disebut sebagai *Gibbs Random Field* (GRF) jika probabilitas dari sebarang konfigurasi $x \in \chi$ dapat dituliskan sebagai

$$P(x)=Z^{-1}exp(-H(x)) \tag{2}$$

dengan $H: \chi \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi riil pada χ, disebut sebagai fungsi energi dan sebuah konstanta normalisasi $Z := \sum_{y \in \chi} \exp(-H(y))$ yang disebut sebagai fungsi partisi.

2.4 Energi dan Potensial

Berikut diberikan fungsi energi dalam bentuk konfigurasi dari himpunan bagian S.

Definisi 6. Sebuah famili dari fungsi bernilai riil $U=\{U_A:\chi \rightarrow \mathbb{R} \mid A \subset S\}$ disebut sebagai fungsi potensial bila:

(i) $U_{\emptyset}(x)=0$ untuk semua $x \in X$

(ii) $U_A(x)=U_A(y)$ untuk semua $x, y \in \chi$ dengan $X_A(x)=X_A(y)$

Dimana energi dari potensial U diberikan oleh

$$H_U := \sum_{A \subset S} U_A \tag{3}$$

Fungsi U disebut juga sebagai potensial tetangga (*neigbor potential*) terhadap sistem daerah sekitar N jika $U_A \equiv 0$ bila A bukan merupakan sebuah *clique*, sedangkan fungsi U_A disebut sebagai *clique* potensial. Selanjutnya *clique* potensial dinotasikan sebagai U_C dimana $C \in \mathbf{C}$.

Proposisi 7. Misalkan P adalah GRF dengan fungsi energi merupakan energi dari potensial tetangga U sebarang terhadap sistem daerah sekitar N, yaitu

$$P(x) = Z^{1} exp\left(-\sum_{C \in \mathbf{C}} U_C(x)\right), \quad \text{dengan } Z=\sum_{y \in \chi} \exp\left(-\sum_{c \in \mathbf{C}} U_C(y)\right)$$

maka karakteristik lokal dari sebarang himpunan bagian $A \subset S$ dapat dinyatakan sebagai

$$P(X_A = x_A|X_{S\backslash A} = x_{S\backslash A}) = \frac{\exp\left(-\sum\limits_{\substack{C\in\mathbf{C}\\ C\cap A\neq\emptyset}} U_C(x)\right)}{\sum\limits_{\substack{y\in\chi\\ X_{S\backslash A}(y)=x_{S\backslash A}(y)}} \exp\left(-\sum\limits_{\substack{C\in\mathbf{C}\\ C\cap A\neq\emptyset}} U_C(x)\right)} \tag{4}$$

Bukti dapat dilihat pada (Winkler, 1995, hal. 55-56).

3. APLIKASI

Markov Random Fields banyak di terapkan pada *image processing*, misalnya dalam masalah texture sintesis, segmentasi image; pada *spatial statistics*, misalnya dalam penentuan tingkat polusi dari suatu daerah, penentuan tingkan kerusakan hutan; pada *physical statistics*, misalnya dalam penentuan medan magnet, masalah perkolasi.

Pada masalah *market share* akan dicoba untuk menggunakan *Potts* model sebagai berikut

$$U(x) = \sum_{i=1}^{T(N^0)} \theta_i \sum_{<s,t>_i} \delta_{x_s,x_t} \tag{5}$$

Sebagai fungsi potensial dengan $T(N^0)$ adalah order dari daerah sekitar dan δ adalah fungsi delta dirac. Sedangkan karakteristik lokalnya diberikan sebagai berikut:

$$\Pi(x_s \mid x_{N(s)}) = \frac{\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{T(N^0)} \theta_i \sum\limits_{<s,t>_i} \delta_{x_s,x_t}\right)}{\sum\limits_{y_s\in L}\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{T(N^0)} \theta_i \sum\limits_{<s,t>_i} \delta_{y_s,y_t}\right)} \tag{6}$$

Penentuan parameter θ, yang merupakan nilai pembobotan terhadap relasi satu site terhadap site-site yang berada dalam dearah sekitarnya, merupakan masalah tersendiri yang harus diselesaikan. Beberapa teknik telah dikembangkan untuk hal itu, salah satunya adalah dengan menggunakan konsep *maximum likelihood*, contoh (Descombes, 1999). Demikian pula dengan penentuan hasil pada saat kondisi stabil telah dicapai. Pada makalah ini akan digunakan Metropolis sampler, dengan algoritma sebagai berikut:

Langkah 1: Tentukan kondisi awal x dan definisikan skema yang akan dikunjungi $\{S_n\}_{n\geq 1}$

Langkah 2: *repeat*

For i = 1 to m do

Langkah 2.1: pilih $l \in L \backslash \{x_{s_i}\}$ secara random uniform dan

tetapkan $\tilde{x}_{s_i} = l$, $\tilde{x}_s = x_s$ untuk seluruh $s \neq s_i$

Langkah 2.2: hitung := min $\left\{1, \frac{\prod(\tilde{x})}{\prod(x)}\right\}$

Langkah 2.3: tetapkan $x_{si} = l$ dengan probabilitas p

Until x memenuhi kriteria kondisi stabil.

3.1 Hasil Simulasi

Sebagai sebuah contoh simulasi, misalkan sebuah perusahaan ingin mengamati produk yang dijualnya sepanjang 8 bulan terakhir di 8 daerah pemasaran dengan tabel penjualan sebagai berikut:

Tabel 1. Contoh Penjualan Selama Delapan Bulan

Bulan\Pasar	Dummy	A	B	C	D	E	F	G	H	Dummy
Dummy	8	3	7	7	9	1	3	7	2	5
1	4	6	3	5	9	9	6	6	1	5
2	0	2	1	8	1	4	1	0	9	2
3	5	8	6	2	6	5	4	9	2	7
4	4	7	3	8	2	3	8	9	0	9
5	4	0	1	6	8	3	0	0	4	0
6	2	9	8	7	2	5	3	7	5	6
7	4	0	4	9	8	6	2	6	5	3
8	6	1	3	8	7	1	1	8	3	5
Dummy	9	4	5	7	1	7	0	4	2	0

Dummy di atas dimaksud untuk memberikan kondisi simulasi di *boundary*, dalam kenyataan *dummy* diawal dapat dianggap sebagai persediaan barang di gudang pada awal dan akhir pengamatan.

Berdasarkan data masa lampau, nilai pembobotan (q) dalam hal ini dianggap sebagai probabilitas perubahan yang terjadi pada penjualan barang terhadap waktu dan tempat.

Misalnya:

- Jika T1 memiliki nilai probabilitas 0.75 berarti probabilitas perubahan penjualan barang yang tergantung pada perubahan penjualan barang pada daerah tetangga kiri-kanan adalah 25 %.
- Jika T2 memiliki nilai probabilitas 0.25 berarti probabilitas perubahan penjualan barang yang tergantung pada perubahan penjualan barang pada bulan sebelumnya dan sesudahnya (pada akhir periode ditentukan dengan prediksi) adalah 25 %.
- Demikian juga pengertiannya untuk T3 dan T4, misalnya T3 memiliki nilai probabilitas 0.75, dan T4 memiliki nilai probabilitas 0.25.

Dengan interpretasi seperti di atas, maka pada kondisi stabil akan didapat kondisi penjualan barang sebagai berikut:

Tabel 2. Penjualan pada Kondisi Stabil

Bulan\Pasar	Dummy	A	B	C	D	E	F	G	H	Dummy
Dummy	8	3	7	7	9	1	3	7	2	5
1	4	6	3	5	9	9	6	6	1	5
2	0	2	1	0	1	3	2	8	4	2
3	5	8	6	9	5	4	1	3	5	7
4	4	7	4	9	7	0	5	7	6	9
5	4	0	1	8	5	9	3	0	1	0
6	2	9	4	6	2	8	1	6	8	6
7	4	0	8	5	1	3	9	4	7	3
8	6	1	3	6	9	5	6	8	9	5
Dummy	9	4	5	7	1	7	0	4	2	0

Jika penjualan barang memiliki pola *seasonal* dan letak daerah penjualan melingkar dalam arti daerah penjualan terakhir berdekatan dengan daerah penjualan awal, membentuk *closed graph*, maka dapat diterapkan sebuah kondisi *toroidal*, yaitu *boundary* dari Pasar A berada di Pasar A dan sebaliknya, sedangkan bulan awal dapat ditempatkan pada bulan akhir dan sebaliknya.

4. KESIMPULAN

Sebagai catatan penutup, dapat dinyatakan bahwa:

- Beberapa tindak lanjut dari makalah ini perlu dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan diluar asumsi-asumsi di atas.
- Pendekatan parametrik dapat digantikan dengan pendekatan nonparametik dengan menggunakan, misalnya *Parzel windows*, sebagai fungsi potensial (Paget,1999).

DAFTAR PUSTAKA

Besag, J., 1974. “Spatial Interaction and the Statistical Analysis of Lattice Systems “, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*,pp. 192 –236

Descombes, X., RD. Morris, J. Zerubia, and M. Berthod, 1999. “Estimation of Markov Random Field Prior Parameters Using Markov Chain Monte Carlo Maximum Likelihood”,*IEEE Transactions on Image Processing,* Vol 8. No.7, July.

Li, S.Z., 1995. *Markov Random Field Modelling in Computer Vision,* Springer-Verlag, Berlin.

Paget, R., and LI. Longstaff, 1999. "Texture Synthesis and Unsupervised Recognition with Nonparametric Multiscale Markov Random Field Models", *IEEE Transactions on PAMI 1999*, http://www.cssip.uq.edu.au/~paget/papers/

Winkler, G., 1995. *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.