SEBARAN STASIONER PADA SISTEM *BONUS-MALUS* SWISS SERTA MODIFIKASINYA
(*Stationary Distribution of Swiss Bonus-Malus System and its Modification*)

Cherry Galatia Ballangan
Fakultas Teknologi Industri, Jurusan Teknik Informatika, Universitas Kristen Petra
e-mail: cherry@peter.petra.ac.id

Hadi Sumarno
Fakultas Matematika & IPA, Jurusan Matematika, Institut Pertanian Bogor

ABSTRAK: Sistem Bonus-Malus merupakan sistem dalam aktuaria yang memperkenalkan pembagian kelas premi (*state*) yang dipengaruhi oleh jumlah klaim yang diajukan oleh pemegang polis tiap tahunnya. Penetapan *state* dalam sistem ini didasarkan pada pencarian sebaran stasioner yang menyatakan banyaknya pemegang polis dalam tiap *state*.

Sistem Bonus-Malus Swiss (BMS) memiliki 22 *state*. Banyaknya *state* yang terlibat dalam sistem ini mengakibatkan sulitnya penentuan sebaran stasioner pada sistem BMS tersebut. Karena itu dalam tulisan ini dipelajari suatu metode penentuan sebaran stasioner dari sistem BMS tersebut, yaitu dengan menggunakan formula rekursif. Dengan formula rekursif ini, sebaran stasioner sistem BMS dapat ditentukan dengan mudah .

Modifikasi sistem BMS untuk jumlah *state* yang tak hingga mengakibatkan perubahan pada formula rekursif untuk mencari sebaran stasionernya. Perubahan ini meliputi penetapan nilai awal dari formula rekursif tersebut.

Kata kunci: sebaran stasioner, formula rekursif, sistem Monus-Malus Swiss.

ABSTRACT*: Bonus-Malus System is a system in actuary that introduce the premium class (state) partition, where the state is influenced by the number of annual claims reported by the policy holder. We could base the determination of the state on the stationary distribution that represent the number of policy holders in any state.*

Swiss Bonus-Malus System has 22 state. The number of state that involved in this system result in the difficulty of stationary distribution determination. Therefore, the aim of this paper is to study a method to obtain stationary distribution of Swiss Bonus-Malus System by recursive formula, with this recursive formula, the stationary distribution of Swiss Bonus-Malus System can be determined easier.

Modification of this system with infinite state result in the changes of recursive formula to obtain the stationary. This changes including the determining of base value of the recursive formula.

Keywords*: stationary distrubution, resursive formula, Swiss Bonus-Malus System.*

1. PENDAHULUAN

Makin meningkatnya resiko kecelakaan dalam berkendaraan membuat persaingan antar perusahaan asuransi mobil semakin meningkat pula. Berbagai sistem ditawarkan oleh perusahaan asuransi untuk menarik semakin banyak orang agar menjadi pemegang polis pada perusahaan tersebut. Salah satu sistem yang digunakan pada asuransi mobil adalah sistem *bonus-malus*. Sistem ini memberikan terobosan baru bagi dunia asuransi, terutama dalam hal besarnya premi yang dipengaruhi oleh jumlah klaim yang diajukan pemegang polis tiap tahunnya. Sistem ini memperkenalkan pula pembagian dan perpindahan *state* di mana setiap *state* memiliki perbedaan premi.

Sistem seperti ini telah diterapkan di beberapa negara maju seperti Jepang, Amerika Serikat, Jerman, dan Swiss. Tiap negara mengetengahkan aturan perpindahan *state*, besarnya skala premi, dan jumlah *state* yang berbeda-beda, disesuaikan dengan keadaan perekonomian dan kondisi negara tersebut. Sistem *bonus-malus* yang dibahas pada karya ilmiah ini adalah sistem Bonus-Malus Swiss (BMS).

Penetapan *state* dalam sistem BMS didasarkan pada pencarian sebaran stasioner dari sebaran yang menyatakan banyaknya klaim setiap tahunnya. Hasil akhir yang diperoleh dari pencarian sebaran stasioner inilah yang akan menentukan persentase pembayaran premi di tiap *state*, aturan perpindahan *state*, dan tentunya analisis keuangan bagi perusahaan asuransi yang bersangkutan.

Penentuan sebaran stasioner dari suatu fungsi sebaran bukan merupakan hal yang mudah dilakukan, apalagi jika melibatkan faktor *state* seperti pada sistem BMS. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode yang memudahkan penanganan hal tersebut.

Dalam tulisan ini akan dipelajari metode yang digunakan untuk mencari sebaran stasioner pada sistem BMS biasa dan sistem BMS kasus tak terbatas, yaitu dengan metode rekursif.

2. PROSES STOKASTIK

Proses stokastik adalah koleksi peubah-peubah acak $X(t)$ dimana t adalah parameter dari sebuah himpunan indeks T yang bersesuaian. Himpunan indeks T merupakan subset dari $(-\infty,\infty)$ dan dapat berupa sebuah interval bilangan riil, misalkan T = $[0, \infty)$ untuk proses kontinu, maupun himpunan yang dapat dihitung, misalkan T = {0,1,2,...} untuk proses diskret. Untuk kasus diskret, proses stokastik biasanya dinotasikan dengan X_t. Nilai yang mungkin untuk $X(t)$ disebut *state*, sedangkan proses $X(t)$ berada pada *state* x dan pada waktu t dinotasikan dengan $X(t) = x$. Bentuk dari proses stokastik yang digunakan dalam karya tulis ini adalah rantai Markov.

2.1 Rantai Markov

Proses stokastik dengan sifat bahwa jika diberikan nilai X_t, maka untuk $s > t$, nilai X_s tidak dipengaruhi oleh nilai-nilai dari X_u untuk $u < t$ disebut sebagai sebuah proses Markov $\{X_t\}$ (Taylor & Karlin 1984). Dengan kata lain, peluang perilaku tertentu di masa mendatang dari sebuah proses, jika *state* saat ini diketahui secara pasti, tidak dipengaruhi oleh informasi tambahan mengenai perilakunya di masa lalu. Rantai Markov diskret adalah sebuah proses Markov yang ruang *state*-nya adalah gugus hingga atau gugus yang dapat dihitung, dan gugus indeksnya adalah T = (0, 1, 2, ...). Dalam bentuk formal, sifat Markov dinyatakan sebagai:

$$\Pr\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\}$$
$$= \Pr\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}, \text{ untuk semua titik waktu } n \text{ dan semua } state\ i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j.$$

Umumnya ruang *state* dari rantai Markov dinyatakan dengan bilangan bulat tak negatif {0, 1, 2, ...}, kecuali jika dinyatakan selainnya, dan $X_n = i$ menyatakan X_n berada pada *state* i.

3. SISTEM BONUS-MALUS

Suatu seistem dikatakan Bonus-Malus jika berlaku asumsi:

1. Semua polis dapat dibagi menjadi kelas-kelas finit sehingga premi dari sebuah polis pada periode tertentu bergantung semata-mata pada kelas untuk periode tersebut.
2. Kelas saat ini didefinisikan secara unik oleh kelas sebelumnya dan banyaknya klain periode tersebut.
3. Ada kelas terakhir di mana semua polis akan ditempatkan setelah sejumlah besari periode tanpa klaim.

3.1 Sistem Bonus-Malus Swiss

Sistem Bonus-Malus Swiss memiliki 22 *state* (kelas premi) yang ditentukan dengan menggunakan terminologi rantai Markov. Berikut ini disajikan tabel yang menunjukkan besarnya pembayaran premi (dalam persen) tiap-tiap kelas yang berlaku pada sistem BMS.

Tabel 1. Persentase besarnya premi per *state*.

State	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Premi	45	50	55	60	65	70	75	80	90	100	110

State	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Premi	120	130	140	155	170	185	200	215	230	250	270

Aturan yang berlaku dalam sistem BMS adalah sebagai berikut. Setiap pemegang polis yang baru akan memasuki sistem pertama kali di *state* 9, kemudian membayar premi dasar (100%) untuk tahun pertamanya. Kemudian posisi *state* pemegang polis tersebut pada tahun berikutnya adalah:

x - 1 jika tidak ada klaim

$x + n.s$ jika terdapat n klaim,

dengan x menyatakan *state* sebelumnya dan s adalah besarnya kenaikan *state* setiap terjadi klaim. Selain itu, *state* baru tidak dapat kurang dari nol atau lebih dari 21. Secara eksplisit, aturan di atas menyatakan, jika tidak ada klaim selama satu tahun, maka *state* berkurang satu tingkat, sebaliknya jika terjadi n klaim, maka *state* dinaikkan sebesar $n.s$. Nilai s yang digunakan pada sistem BMS adalah 3. Kemudian apabila pemegang polis berada pada *state* 0 (bonus maksimum) dan tidak terdapat klaim sepanjang tahun sesudahnya, maka ia tetap berada pada *state* tersebut. Demikian pula, apabila seorang pemegang polis berada pada *state* x dan jumlah klaim adalah n sedemikian sehingga $x + n.s \geq 21$, maka *state* yang baru tetaplah 21.

3.2 Metode Pencarian Sebaran Stasioner

Pada umumnya, pencarian sebaran stasioner dilakukan dengan meggunakan matriks peluang transisi. Namun untuk kasus ini, penggunaan matriks peluang transisi tidaklah efisien dikarenakan jumlah *state* yang terlibat cukup besar sehingga akan sangat menyulitkan dalam penghitungannya. Karena itu, metode yang digunakan di sini adalah metode rekursif.

Bagi setiap pemegang polis, deretan *state* membentuk rantai Markov. Untuk penyederhanaan, perbedaan peluang transisi pemegang polis yang satu dengan pemegang polis yang lain diabaikan. Jika besarnya perpindahan pada skala premi untuk tahun t+1 dinotasikan dengan Y_{t+1}, maka didefinisikan:

$$Y_{t+1} = \begin{cases} -1, & \text{jika tidak ada klaim} \\ s.n, & \text{jika ada } n \text{ klaim,} \end{cases} \tag{1}$$

Diasumsikan pula Y_1, Y_2, ... saling bebas dan menyebar secara identik dengan fungsi peluang:

$$q(y) = \Pr[Y_t = y], \qquad y = -1, s, 2s, 3s, ..., \tag{2}$$

Jika X_{t+1} adalah *state* dari pemegang polis pada waktu t+1, maka X_{t+1} didefinisikan sebagai:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + Y_{t+1}, & \text{jika } 0 \leq X_t + Y_{t+1} \leq 21 \\ 0, & \text{jika } X_t + Y_{t+1} = -1 \\ 21, & \text{jika } X_t + Y_{t+1} > 21 \end{cases} \tag{3}$$

Fungsi sebaran untuk X_{t+1} memenuhi hubungan:

$$F(x, t+1) = \Pr(X_{t+1} \leq x), \; x = 0, 1, 2, ..., 21 \quad t = 0, 1, ...$$

$$= \sum_{y=-1}^{\infty} \Pr(X_{t+1} \leq x | Y_{t+1} = y).\Pr(Y_{t+1} = y)$$

$$= \sum_{y=-1}^{\infty} \Pr(X_t + Y_{t+1} \leq x | Y_{t+1} = y).q(y)$$

$$= \sum_{y=-1}^{\infty} \Pr(X_t + y \leq x).q(y)$$

$$= \sum_{y=-1}^{\infty} \Pr(X_t \leq x - y).q(y)$$

sehingga diperoleh

$$F(x, t+1) = \sum_{y=-1}^{x} F(x-y, t)q(y), \tag{4}$$

dengan $F(21, t+1) = 1$.

Sebaran stasioner fungsi $F(x)$ diperoleh dalam jangka waktu yang sangat lama, sehingga:

$$F(x) = \lim_{t \to \infty} F(x, t+1)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \sum_{y=-1}^{x} F(x-y, t).q(y) = \sum_{y=-1}^{x} F(x-y).q(y),$$

$$= \sum_{y=-1}^{x} q(y) \lim_{t \to \infty} F(x-y, t)$$

$$x = 0, 1, 2, ..., 21, \tag{5}$$

dengan $F(21) = 1$.

Persamaan (5) lebih lanjut dapat diuraikan sebagai berikut:

$$F(x) = F(x+1).q(-1) + \sum_{y=0}^{x} F(x-y).q(y)$$

$$\Leftrightarrow F(x+1).q(-1) = F(x) - \sum_{y=0}^{x} F(x-y).q(y)$$

$$\Leftrightarrow F(x+1) = \frac{1}{q(-1)} \left[F(x) - \sum_{y=0}^{x} F(x-y).q(y) \right].$$

Rumus di atas merupakan rumus rekursif, tetapi karena nilai awal $F(0)$ tidak diketahui, maka nilai $F(x)$ dengan rumusan di atas tidak dapat langsung dicari.

Untuk mencari nilai $F(x)$, dapat dibangkitkan fungsi-fungsi pembantu $A(x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ yang sebanding dengan nilai-nilai $F(x)$ dengan memilih sembarang $A(0) > 0$, sehingga:

$$A(x+1) = \frac{1}{q(-1)}\left[A(x) - \sum_{y=0}^{x} A(x-y).q(y)\right] \qquad (6)$$

Selanjutnya, karena $F(x)$ sebanding dengan $A(x)$ sedangkan $F(21) = 1$, maka
$x = 0, 1, 2, ..., 21.$ (7)

3.3 Penghitungan Numerik

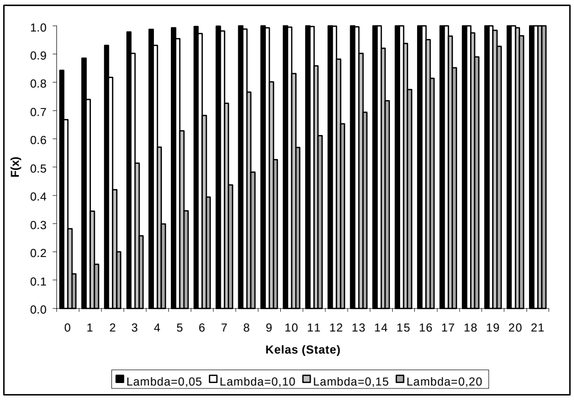
Diasumsikan, untuk setiap pemegang polis dengan frekuensi harapan klaim λ (per tahun), peluang ia memiliki n klaim mengikuti sebaran Poisson dengan parameter $\lambda > 0$, yaitu:

$$\Pr[N_t = n] = \frac{e^{-l}\, l^{n}}{n!},\ n = 0, 1, 2, ..., \qquad (8)$$

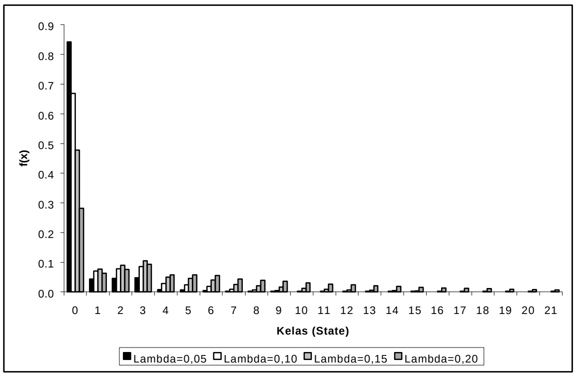
dengan N_t adalah peubah acak banyaknya klaim. Dengan asumsi di atas, maka untuk sistem BMS asli yang memiliki s = 3 didapatkan:
$q(-1) = \Pr\{N_t = 0\} = e^{-\lambda}$
$q(0) = q(1) = q(2) = 0$
$q(3) = \Pr\{N_t = 1\} = \lambda e^{-\lambda}$
$q(4) = q(5) = 0$
$q(6) = \Pr\{N_t = 2\} = \lambda^2 e^{-\lambda} / 2!$
.... dst.

Misalkan terdapat 4 tingkatan resiko (Dufresne 1988), yaitu $\lambda_i = 0{,}05i$, i =1, 2, …4, maka untuk masing-masing nilai λ, penentuan sebaran kumulatifnya dapat dilakukan dengan metode rekursif berikut:
1. Pilih $A(0) = 1$
2. Hitung untuk $x = 0, 1, 2, \ldots, 20$
$$A(x+1) = \frac{1}{q(-1)}\left[A(x) - \sum_{y=0}^{x} A(x-y).q(y)\right]$$
3. Hitung $F(x) = \frac{A(x)}{A(21)}$, untuk $x = 0,1,2, .., 21.$

Penghitungan tersebut dapat dilakukan dalam bahasa C dan menggunakan software Turbo C. Sebaran kumulatif dan fungsi kepekatan peluang beserta grafiknya diberikan berikut ini.



Gambar 1. Grafik Sebaran Stasioner Sistem BMS



Gambar 2. Grafik Fungsi kepekatan Peluang Sistem BMS

Sebaran Stasioner dan Fungsi Kepekatan Peluang Sistem BMS biasa

x	**F(x,l)**			
	l = **0,05**	l = **0,10**	l = **0,15**	l = **0,20**
0	0,842309	0,668472	0,478218	0,281574
1	0,885496	0,738776	0,555609	0,343915
2	0,930896	0,816473	0,645526	0,420058
3	0,978624	0,902342	0,749994	0,513060
4	0,986684	0,930395	0,799636	0,570339
5	0,992997	0,954368	0,845704	0,627830
6	0,997364	0,973093	0,885739	0,682822
7	0,998516	0,981857	0,911202	0,725757
8	0,999270	0,988387	0,934700	0,765496
9	0,999690	0,992817	0,949258	0,801011
10	0,999837	0,995300	0,961313	0,831157
11	0,999922	0,997016	0,970898	0,858160
12	0,999965	0,998127	0,978274	0,881943
13	0,999982	0,995880	0,983807	0,902646
14	0,999920	0,999247	0,988112	0,920965
15	0,999996	0,999533	0,991408	0,937062
16	0,999998	0,999712	0,993917	0,951176
17	0,999999	0,999829	0,995851	0,963610
18	1,000000	0,999903	0,997331	0,974536
19	1,000000	0,999950	0,998464	0,984135
20	1,000000	0,999981	0,999334	0,992579
21	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

x	*f*(*x*,l)			
	l = **0,05**	l = **0,10**	l = **0,15**	l = **0,20**
0	0,842309	0,668472	0,478218	0,281574
1	0,043186	0,070304	0,077392	0,062341
2	0,045400	0,077698	0,089917	0,076144
3	0,047728	0,085869	0,104468	0,093002
4	0,008060	0,028053	0,049642	0,057278
5	0,006314	0,023973	0,046067	0,057492
6	0,004367	0,018724	0,040035	0,054992
7	0,001152	0,008764	0,025464	0,042935
8	0,000754	0,006529	0,021268	0,039739
9	0,000420	0,004430	0,016788	0,035516
10	0,000146	0,002483	0,012055	0,030145
11	0,000085	0,001716	0,009585	0,027004
12	0,000043	0,001110	0,007377	0,023783
13	0,000017	0,000674	0,005533	0,020703
14	0,000009	0,000447	0,004304	0,018319
15	0,000005	0,000286	0,003296	0,016097
16	0,000002	0,000179	0,002509	0,014114
17	0,000001	0,000117	0,001934	0,012434
18	0,000000	0,000074	0,001481	0,010926
19	0,000000	0,000047	0,001133	0,009599
20	0,000000	0,000030	0,000870	0,008444
21	0,000000	0,000019	0,000666	0,007421

Dari hasil yang diperoleh dapat dilihat kecenderungan klien berada di *state* 0 semakin besar untuk nilai λ yang semakin kecil. Hal ini sesuai dengan asumsi yang dipakai bahwa λ adalah frekuensi harapan klaim, sehingga semakin sedikit klaim yang diajukan, akan membuat klien semakin mendekati state 0.

4. MODIFIKASI SISTEM UNTUK JUMLAH *STATE* YANG TAK HINGGA

4.1 Metode Pencarian Sebaran Stasioner

Sistem BMS di atas dapat diperluas dalam bentuk jumlah *state* yang tak hingga (tanpa batas atas). Untuk kasus ini X_{t+1} didefinisikan sebagai:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + Y_{t+1}, \text{ jika } X_t + Y_{t+1} \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , \text{ jika } X_t + Y_{t+1} = -1 \end{cases} \tag{9}$$

Dari definisi di atas, secara intuitif jelas bahwa jika nilai harapan besarnya langkah perpindahan *state*, $E[Y_t]$, lebih dari nol, maka *state* akan terus meningkat tanpa batas. Sebaliknya, jika $-1 < E[Y_t] < 0$, maka *state* akan mendekati bentuk stasioner.

Dapat disimpulkan, sebaran stasioner untuk sistem bonus-malus dengan jumlah *state* tak hingga ada jika memenuhi:

$$E[Y_t] = \sum_{y=-1}^{\infty} y.q(y) < 0\,. \tag{10}$$

Sebaran stasioner fungsi $F(x)$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (5), untuk x = 0, 1, 2, ..., yaitu:

$$F(x) = \sum_{y=-1}^{x} F(x-y)q(y)\,, \tag{11}$$

dengan $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Pilih $A(0) = F(0)$. Jika dimisalkan

$f(0) = F(0)$, dan

$$f(x) = F(x) - F(x-1)\,, \tag{12}$$

maka dari persamaan (11) didapatkan:

$$f(0) = F(0) = \sum_{y=-1}^{0} F(-y).q(y)$$

$$= F(1).q(-1) + F(0).q(0)$$

$$= [f(1) + F(0)].q(-1) + f(0).q(0)$$

$$= f(1).q(-1) + f(0).q(-1) + f(0).q(0)\,. \tag{13}$$

Sedangkan dari (12) diperoleh:

$F(x) = f(x) + F(x-1)$, dan

$F(x-y) = f(x-y) + F(x-y-1)$,

sehingga

$$f(x) + F(x-1) = \sum_{y=-1}^{x} [f(x-y) + F(x-y-1)].q(y).$$

Karena $F(x-1) = \sum_{y=-1}^{x} F(x-y-1).q(y)$, maka

$$f(x) = \sum_{y=-1}^{x} f(x-y).q(y)\,,\ x = 1, 2, ... \tag{14}$$

Fungsi pembangkit peluang dari X untuk $|u| \leq 1$ dapat dinyatakan sebagai:

$$G(u) = \sum_{x=0}^{\infty} u^x f(x) \tag{15}$$

dan fungsi pembangkit peluang dari Y adalah:

$$H(u) = \sum_{y=-1}^{\infty} u^y q(y) \tag{16}$$

(Karlin & Taylor 1975).

Dengan memasukkan persamaan (13) dan (14) pada persamaan (15) didapat:

$$G(u) = u^0 f(0) + \sum_{x=1}^{\infty} u^x f(x)$$

$$= f(1)q(-1) + f(0)q(-1) + f(0)q(0) + \sum_{x=1}^{\infty} u^x \sum_{y=-1}^{x} f(x-y).q(y).$$

$$= \sum_{y=-1}^{0} f(x-y).q(y) + f(0)q(-1) + \sum_{x=1}^{\infty} u^x \sum_{y=-1}^{x} f(x-y).q(y)$$

$$G(u) = \sum_{x=0}^{\infty} u^x \sum_{y=-1}^{x} f(x-y).q(y) + f(0)q(-1) \qquad (17)$$

Kemudian untuk variabel $z = x - y$, didapatkan:

$$G(u) = \sum_{y=-1}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} u^y q(y) u^z f(z) - f(0)q(-1)u^{-1} + f(0)q(-1)$$

$$= H(u).G(u) - f(0).q(-1)u^{-1} + f(0).q(-1),$$

atau

$$G(u) = \frac{(u-1).f(0).q(-1)}{u(1-H(u))}. \qquad (18)$$

Dengan menggunakan hukum l'Hopital diperoleh:

$$\lim_{u\to 1} G(u) = \lim_{u\to 1} \frac{(u-1).f(0).q(-1)}{u(1-H(u))} = \lim_{u\to 1} \frac{f(0).q(-1)}{1-H(u)-uH'(u)}$$

$$= \frac{f(0).q(-1)}{-H'(1)}$$

Karena $G(1) = 1$, maka:

$$G(1) = \frac{f(0).q(-1)}{-H'(1)} = 1, \qquad (19)$$

sehingga

$$f(0) = \frac{-H'(1)}{q(-1)}$$

$$= 1 - \sum_{y=1}^{\infty} \frac{y.q(y)}{q(-1)}. \qquad (20)$$

4.2 Penghitungan Numerik

Dengan menggunakan asumsi yang sama seperti pada sistem BMS biasa, didefinisikan peubah acak Y_t yang menyatakan perubahan *state*:

$$Y_t = \begin{cases} 3N_t, N_t > 0 \\ -1, \quad N_t = 0, \end{cases} \qquad t = 1, 2, ...,$$

sehingga Y_t dapat ditulis:

$$E[Y_t] = E[3N_t] - Pr[N_t = 0] = 3\ddot{e} - e^{-\ddot{e}}.$$

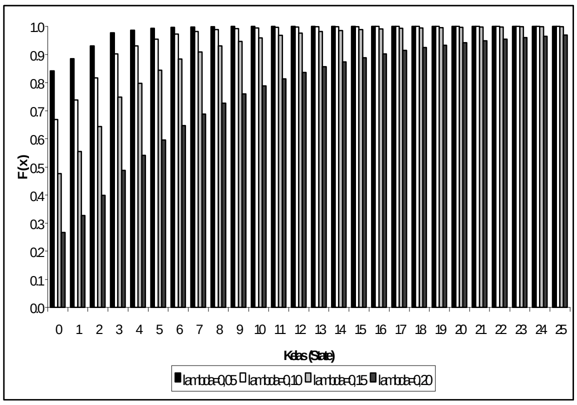
Sesuai syarat (10), maka $E[Y_t] = 3\lambda - e^{-\lambda} < 0$, artinya $\lambda < 0,257628$. Ekspansi deret Taylor dari persamaan (20) memberikan $f(0) = 1 - 3\lambda e^{\lambda}$.

Misalkan terdapat 4 tingkatan resiko yaitu $\lambda_i = 0,05i$, $i = 1, 2, ..., 4$, maka penentuan sebaran kumulatifnya dapat dilakukan dengan metode rekursif berikut:

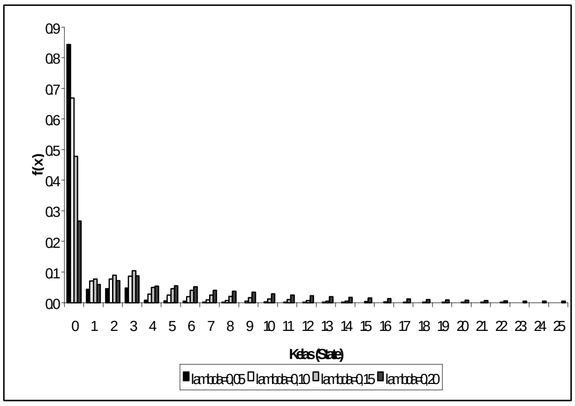
1. Pilih $F(0) = f(0) = 1 - 3\lambda e^{\lambda}$
2. Hitung untuk $x = 0, 1, 2, \ldots$

$$F(x+1) = \frac{1}{q(-1)} \left[F(x) - \sum_{y=0}^{x} F(x-y).q(y) \right]$$

Seperti dalam kasus sebelumnya, penghitungan tersebut dapat dilakukan dalam bahasa C dan menggunakan software Turbo C. Dalam contoh ini hanya diberikan untuk 25 *state*. Sebaran kumulatif dan fungsi kepekatan peluang beserta grafiknya diberikan berikut ini.



Gambar 3. Grafik Sebaran Stasioner Sistem BMS Kasus Tak Terbatas



Gambar 4. Grafik Fungsi Peluang Sistem BMS Kasus Tak Terbatas

Sebaran Stasioner dan Fungsi Kepekatan Peluang Sistem BMS dengan jumlah *state* tak hingga

x	***F*(*x*,l)**			
	l **= 0,05**	l **= 0,10**	l **= 0,15**	l **= 0,20**
0	0,842309	0,668449	0,477175	0,267158
1	0,885495	0,738750	0,554398	0,326308
2	0,930896	0,816445	0,644118	0,398553
3	0,978624	0,902311	0,748359	0,486794
4	0,986683	0,930363	0,797893	0,541140
5	0,992997	0,954336	0,843859	0,595688
6	0,997364	0,973059	0,883807	0,647865
7	0,998516	0,981824	0,909215	0,688602
8	0,999270	0,988353	0,930436	0,726306
9	0,999690	0,992783	0,947188	0,760004
10	0,999837	0,995266	0,959216	0,788605
11	0,999922	0,996982	0,968780	0,814226
12	0,999965	0,998092	0,976141	0,836792
13	0,999982	0,998766	0,981662	0,856435
14	0,999991	0,999213	0,985957	0,873816
15	0,999996	0,999499	0,989246	0,889089
16	0,999998	0,999678	0,991749	0,902480
17	0,999999	0,999794	0,993679	0,914278
18	1,000000	0,999896	0,995156	0,924644
19	1,000000	0,999916	0,996286	0,933752
20	1,000000	0,999946	0,997154	0,941763
21	1,000000	0,999966	0,997819	0,948805
22	1.000000	0.999978	0.998328	0.954994
23	1.000000	0.999986	0.998719	0.960436
24	1.000000	0.999991	0.999018	0.965220
25	1.000000	0.999994	0.999247	0.969425

x	***f*(*x*,l)**			
	l **= 0,05**	l **= 0,10**	l **= 0,15**	l **= 0,20**
0	0,842309	0,668449	0,477175	0,267158
1	0,043186	0,070301	0,077223	0,059150
2	0,045401	0,077695	0,089720	0,072245
3	0,047728	0,085866	0,104241	0,088241
4	0,008059	0,028052	0,049534	0,054346
5	0,006314	0,023973	0,045966	0,054548
6	0,004367	0,018723	0,039948	0,052177
7	0,001152	0,008765	0,025408	0,040737
8	0,000754	0,006529	0,021221	0,037704
9	0,000420	0,004430	0,016752	0,033698
10	0,000147	0,002483	0,012028	0,028601
11	0,000085	0,001716	0,009564	0,025621
12	0,000043	0,001110	0,007361	0,022566
13	0,000017	0,000674	0,005521	0,019643
14	0,000009	0,000447	0,004295	0,017381
15	0,000005	0,000286	0,003289	0,015273
16	0,000002	0,000179	0,002503	0,013391
17	0,000001	0,000116	0,001930	0,011798
18	0,000001	0,000102	0,001477	0,010366
19	0,000000	0,000020	0,001130	0,009108
20	0,000000	0,000030	0,000868	0,008011
21	0,000000	0,000020	0,000665	0,007042
22	0.000000	0.000012	0.000509	0.006189
23	0.000000	0.000008	0.000391	0.005442
24	0.000000	0.000005	0.000299	0.004784
25	0.000000	0.000003	0.000229	0.004205

Dari gambar 3 dan gambar 4 dapat dilihat bahwa sebaran stasioner antara sistem BMS biasa dengan sistem BMS kasus tak hingga tidak terlalu jauh berbeda. Tetapi jika diperhatikan, semakin besar nilai λ, maka nilai fungsi kepekatan peluang pada sistem BMS biasa akan lebih besar dibandingkan sistem BMS kasus kontinu. Hal ini dikarenakan, semakin banyak klaim terjadi, akan mengakibatkan sebaran stasioner pada sistem BMS kasus tak hingga semakin tersebar sampai tak hingga *state*.

5. KESIMPULAN & SARAN

5.1 Kesimpulan

Sistem *bonus-malus* Swiss (BMS) memiliki 22 *state* yang memiliki sifat Markov. Penentuan sebaran stasioner pada sistem ini sangat sulit apabila dilakukan secara analitik. Karena itu, penggunaan metode rekursif dalam menentukan sebaran stasioner sistem BMS dapat memberikan kemudahan. Sebaran stasioner tersebut diberikan oleh:

$$F(x) = \frac{A(x)}{A(21)}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, 21,$$

dengan

$$A(x+1) = \frac{1}{q(-1)}\left[A(x) - \sum_{y=0}^{x} A(x-y).q(y)\right].$$

Fungsi $A(x)$ adalah fungsi pembantu dengan sembarang nilai A(0)>0.

Sistem BMS dapat diperluas menjadi sistem BMS dengan jumlah *state* tak hingga. Untuk kasus ini, sebaran stasionernya ada jika λ<0,257628, dan diberikan oleh:

$$F(x+1) = \frac{1}{q(-1)}\left[F(x) - \sum_{y=0}^{x} F(x-y).q(y)\right], \text{ dengan}$$

$F(0) = f(0) = 1 - 3\lambda e^{\lambda}$.

5.2 Saran

Pada pembahasan di atas dibahas aspek teoritis dari sebaran stasioner sistem Bonus Malus Swiss. Karena itu, akan lebih lengkap apabila dipelajari dari sisi aplikasi sistem Bonus Malus tersebut. Bentuk aplikasi ini dapat berupa pencarian nilai λ yang dapat diperoleh melalui penelitian, khusus untuk kasus yang ada di Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bowers, N.L, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones & C.J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Chicago. 1997.
2. Dufresne, F. Distributions Stationnaires d'un Systeme Bonus-Malus et Probabilite de Ruine. *ASTIN Bulletin*, 1988, 18:31-46.
3. Dufresne, F. The Efficiency of The Swiss Bonus-Malus System. *Bulletin of The Swiss Association of Actuaries*, 1995, 1:29-42.
4. Karlin, S, & Taylor, H.M. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York. 1975.
5. Taylor, H.M, & Karlin, S. *An Introduction to Stochastic Modelling*. Academic Press, Inc, New York. 1984.