Jurnal "LOG!K@", Jilid 8, No. 1, 2018, Hal. 11 - 18
ISSN 1978 – 8568

PELABELAN *PRODUCT CORDIAL* DAN *PRODUCT CORDIAL* SISI PADA GRAF *DRAGONFLY*

Budi Harianto
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: uinjktbudi13@gmail.com

Abstract: For a graph $G = (V(G), E(G))$, a labelling $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ is called an product cordial labeling of G if f induced edge labelling $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ is given by $f^*(uv) = f(u).f(v), \forall uv \in E(G)$ be such that $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ and $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$. A graph G admits product cordial labelling is called product cordial graph. A labelling $f: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ is called an edge product cordial labelling of G if the induced vertex labelling $f^*: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ is given by $f^*(v) = f(e_1).f(e_2) \dots f(e_n)$ if $e_1, e_2, \dots, e_n$ are the edges incident with the vertex v. A graph G admits edge product cordial labelling is called edge product cordial graph. In this paper we investigate product cordial and edge product cordial labelling of dragonfly graph Dg_n.
Keywords: *Cordial Graph, Product Cordial Graph, Edge Product Cordial Graph, Dragonfly Graph.*

Abstrak: Untuk graf $\mathrm{G} = (\mathrm{V(G)}, \mathrm{E(G)})$, pelabelan $\mathrm{f}: \mathrm{V(G)} \rightarrow \{0,1\}$ disebut pelabelan product cordial pada G jika f menginduksi pelabelan sisi $\mathrm{f}^*: \mathrm{E(G)} \rightarrow \{0,1\}$ dengan $\mathrm{f}^*(\mathrm{uv}) = \mathrm{f(u)}.\mathrm{f(v)}, \forall \mathrm{uv} \in \mathrm{E(G)}$ sehingga $|\mathrm{v_f}(0) - \mathrm{v_f}(1)| \leq 1$ dan $|\mathrm{e_f}(0) -$ ef1≤1. Graf G dengan pelabelan product cordial disebut graf product cordial. Pelabelan $\mathrm{f}: \mathrm{E(G)} \rightarrow \{0,1\}$ disebut pelabelan product cordial sisi pada G jika f menginduksi pelabelan titik $\mathrm{f}^*: \mathrm{V(G)} \rightarrow \{0,1\}$ dengan $\mathrm{f}^*(\mathrm{v}) = \mathrm{f}(\mathrm{e}_1).\mathrm{f}(\mathrm{e}_2) \dots \mathrm{f}(\mathrm{e}_\mathrm{n})$ jika $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}$ adalah sisi-sisi yang bertetangga dengan titik v sehingga memenuhi syarat $|\mathrm{v}_{\mathrm{f}^*}(1) - \mathrm{v}_{\mathrm{f}^*}(0)| \leq 1$ dan$|\mathrm{e_f}(1) - \mathrm{e_f}(0)| \leq 1$. Suatu graf G dengan pelabelan product cordial sisi disebut graf product cordial sisi. Pada paper ini, akan dibahas tentang pelabelan product cordial dan product cordial sisi pada graf dragonfly Dg_n.
Kata kunci: *Graf Cordial*, *Pelabelan Product Cordial, Pelabelan Product Cordial Sisi, Graf Dragonfly*.

PENDAHULUAN

Misalkan graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf hingga, terhubung, tidak berarah, tanpa loop dan sisi ganda. Pada bagian ini, akan diberikan beberapa definisi dan informasi lainnya yang berguna untuk penelitian ini. Istilah yang tidak didefinisikan disini, mengacu kepada pendefinisian Chartrand dan Lesniak [3]. Untuk detail tentang pelabelan graf mengacu ke *A Dinamic Survey of Graph Labeling* oleh Gallian [5].

Definisi 1. Pelabelan pada graf $G = (V(G), E(G))$ adalah penetapan dari suatu bilangan bulat pada himpunan titik (atau sisi atau keduanya) sesuai dengan kondisi tertentu. Jika yang diberi label adalah himpunan titik (atau sisi atau keduanya) maka pelabelannya disebut pelabelan titik (atau sisi atau total).

Sebagian besar teknik pelabelan graf berasal dari pelabelan *graceful* yang diperkenalkan oleh Rosa [2] dan Colomb [7]. Konjektur tentang pelabelan *graceful* pada graf pohon oleh Kozig [1] menjadi rujukan bagi masalah pelabelan yang memiliki tema pelabelan *graceful.*

Definisi 2. Graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dikatakan *gracefull* jika terdapat suatu fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, |V(G)|\}$ sehingga menginduksi fungsi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, |E(G)|\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(e) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap sisi $e = uv$ dimana f^* merupakan fungsi bijektif dan f disebut pelabelan *gracefull* pada G.

Pada tahun 1987, Cahit [4] memperkenalkan konsep pelabelan *cordial* yang lebih lemah dari pelabelan *graceful* dimana Cahit membuktikan banyak hasil pada graf untuk pelabelan *cordial*. Cahit juga memperkenalkan beberapa skema pelabelan juga diperkenalkan dengan sedikit variasi pada pelabelan *cordial* seperti pelabelan *prime cordial*, pelabelan *A-cordial*, pelabelan *H-cordial*, pelabelan *product cordial*, dll.

Pada tahun 2004, sundaram dkk [6] memperkenalkan konsep pelabelan *product cordial* dimana perbedaannya dengan pelabelan *cordial* adalah dengan mengganti label pada titik dimana didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3. Untuk graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$, Pelabelan $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ disebut pelabelan biner titik pada G dan $f(v)$ disebut label dari titik pada G atas f.

Notasi. Jika untuk sembarang sisi $e = uv$, pelabelan f menginduksi pelabelan sisi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ dengan $f^*(e) = |f(u) - f(v)|$, maka

$$v_f(i) = \text{banyaknya titik pada } G \text{ yang berlabel } i \text{ atas } f$$
$$e_{f^*}(i) = \text{banyaknya sisi pada } G \text{ yang berlabel } i \text{ atas } f$$

dimana $i = 0,1$.

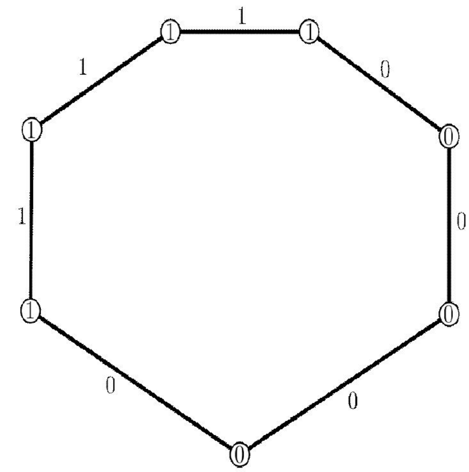
Definisi 4. Pelabelan biner titik pada graf G disebut pelabelan *cordial* jika $\left|v_f(1) - v_f(0)\right| \leq 1$ dan $\left|e_{f^*}(1) - e_{f^*}(0)\right| \leq 1$. Suatu graf G dengan pelabelan *cordial* disebut graf *cordial.*

Pada tahun 2004, Sundaram, Ponraj dan Somasundaram dkk. [6] mendefinisikan pelabelan *product cordial* seperti berikut.

Definisi 5. pelabelan biner titik pada graf G yang menginduksi pelabelan sisi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$, didefinisikan dengan $f^*(e = uv) = f(u).f(v)$ disebut pelabelan *product cordial* atau pelabelan *product cordial* titik jika $\left|v_f(1) - v_f(0)\right| \leq 1$ dan$\left|e_{f^*}(1) - e_{f^*}(0)\right| \leq 1$. Suatu graf G dengan pelabelan *product cordial* disebut graf *product cordial.*

Sundaram, Ponraj dan Somasundaram [6] membuktikan bahwa graf *unicyclic* dengan orde ganjil, *triangular snaks,, dragons*, *helms*, dan *unicon* dengan dua lintasan adalah graf *product cordial*.

Ilustrasi 6. Sebagai ilustrasi dari definisi 5, perhatikan graf lingkaran C_7 pada Gambar 1. Dapat dilihat bahwa $v_f(0) = 3$, $v_f(1) = 4$, $e_{f^*}(0) = 4$, $e_{f^*}(1) = 3$, sehingga $\left|v_f(1) - v_f(0)\right| \leq 1$ dan $\left|e_{f^*}(1) - e_{f^*}(0)\right| \leq 1$. Jadi, graf lingkaran C_7 merupakan graf *product cordial*.



Gambar 1. Pelabelan *Product Cordial* Graf C_7.

Pada perkembangannya banyak yang membahas tentang pelabelan *product cordial*. Misalnya, Vadya dan Kanani telah membahas tentang pelabelan *product cordial* pada beberapa graf yang terkait dengan graf lingkaran yaitu graf *union* dan graf *shadow* [8]. Vaidya dan Barasara mempelajari pelabelan *product cordial* pada beberapa graf baru yaitu pada graf F_n, satu *chord* pada graf C_n, dan dua *chord* pada graf C_n [9]. Kemudian Gao dkk mempelajari pelabelan *product cordial* pada graf P_{n+1}^m [13].

Konsep dari pelabelan *cordial* sisi diperkenalkan oleh Yilmax dan Cahit dimana didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 7. Untuk graf G, fungsi pelabelan sisi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ menginduksi fungsi pelabelan titik $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan oleh $f(v) = \sum\{f^*(uv)|uv \in E(G)\}(mod 2)$. Fungsi f^* dsebut pelabelan *cordial* sisi pada G jika $\left|v_{f^*}(1) - v_{f^*}(0)\right| \leq 1$ dan$\left|e_f(1) - e_f(0)\right| \leq 1$. Suatu graf disebut graf *cordial* sisi jika memuat pelabelan *cordial* sisi.

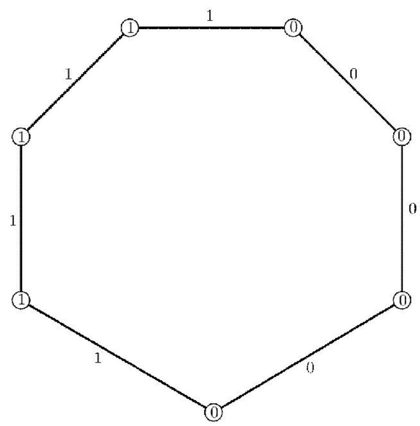
Konsep dari pelabelan *product cordial* sisi diperkenalkan oleh Vaidya dan Barasara [10] yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8. Untuk graf G, pelabelan sisi $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ menginduksi pelabelan titik $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$ dimana $f^*(v) = f(e_1).f(e_2) \dots f(e_n)$, untuk $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah sisi-sisi yang bertetangga dengan titik v.

Definisi 9. pelabelan f disebut pelabelan *product cordial* sisi pada graf G jika $\left|v_f(1) - v_f(0)\right| \leq 1$ dan$\left|e_{f^*}(1) - e_{f^*}(0)\right| \leq 1$. Suatu graf G dengan pelabelan *product cordial* sisi disebut graf *product cordial* sisi.

Pada tahun 2012, Vaidya dan Barasara [10] membuktikan pelabelan *product cordial* sisi pada beberapa graf yaitu pada graf pohon, *unicyclic*, *corona* $G_1 \odot G_1$, *crown* $(C_n \odot K_1)$, *wheel* W_n, *helm* H_n, dll. Di tahun 2013, Vaidya dan Barasara [11] juga mempelajari tentang pelabelan *product cordial* sisi untuk beberapa keluarga baru pada graf. Mereka juga menginvestigasi beberapa keluarga graf yang merupakan graf *product cordial* sisi atau bukan misalnya untuk graf K_n $(n \geq 4)$ bukan graf *product cordial* sisi [12].

Ilustrasi 10. Sebagai ilustrasi dari definisi 9, perhatikan graf lingkaran C_7 pada Gambar 2. Dapat dilihat bahwa $v_{f^*}(0) = 4$, $v_{f^*}(1) = 3$, $e_f(0) = 3$, $e_f(1) = 4$, sehingga $|v_{f^*}(1) - v_{f^*}(0)| \leq 1$ dan $|e_f(1) - e_f(0)| \leq 1$. Jadi, graf lingkaran C_7 merupakan graf *product cordial* sisi.



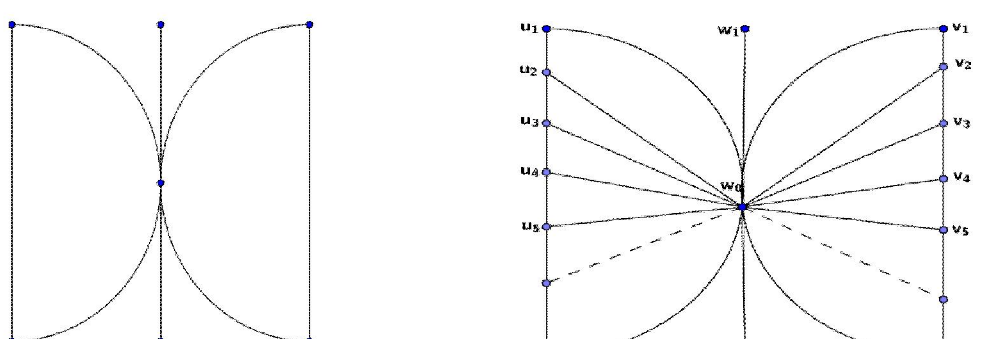
Gambar 2. Pelabelan *Product Cordial* Sisi Graf C_7.

Oleh karena itu, penulis mencoba menerapkan konsep pelabelan *product cordial* dan *product cordial* sisi pada suatu graf yang penulis definisikan sendiri yaitu graf *dragonfly*. Untuk definisi graf *dragonfly* sendiri dapat dilihat di definisi 1.11.

Definisi 11. Graf *dragonfly*, dinotasikan dengan Dg_n, adalah graf dengan $V(Dg_n) = \{u_i, v_j, w_k \mid i, j = 1,2, \dots, n+2, k = 0,1,2\}$ dan $E(Dg_n) = \{u_i u_{i+1} \mid i = 1,2, \dots, n+1\} \cup \{u_i w_0 \mid i = 1,2, \dots, n+2\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i = 1,2, \dots, n+1\} \cup \{v_i w_0 \mid i = 1,2, \dots, n+2\} \cup \{w_i w_0 \mid i = 1,2\}$

Ilustrasi 12. Sebagai ilustrasi definisi 11, graf awal dan graf Dg_n diberikan pada Gambar 3(a) dan 3(b). Dapat terlihat bahwa banyaknya titik padaa graf Dg_n adalah $2n + 7$.

Pada paper ini akan dibahas tentang pelabelan *product cordial* pada graf *dragonfly* Dg_n.



(a) (b)

Gambar 3. (a) Graf awal Dg_n, (b) graf Dg_n

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1. Graf Dg_n adalah graf *product cordial.*

Bukti:

Misalkan Dg_n adalah graf *dragonfly*.

Definisikan $f: V(Dg_n) \to \{0,1\}$, dimana Dg_n akan dibagi dalam dua kasus.

Kasus 1. Untuk n ganjil.

$$
\begin{aligned}
&f(w_0) = 1\\
&f(w_i) = 0,\, 1 \le i \le 2\\
&f(u_i) = 1,\, 1 \le i \le \left\lceil \tfrac{n+2}{2} \right\rceil\\
&f(u_i) = 0,\, \left\lceil \tfrac{n+2}{2} \right\rceil + 1 \le i \le n+2\\
&f(v_i) = 1,\, 1 \le i \le \left\lceil \tfrac{n+2}{2} \right\rceil\\
&f(v_i) = 0,\, \left\lceil \tfrac{n+2}{2} \right\rceil + 1 \le i \le n+2
\end{aligned}
$$

Dengan pelabelan f di atas, diperoleh bahwa:

$$
\begin{aligned}
&v_f(1) = v_f(0) + 1 = 2\left\lceil \tfrac{n+2}{2} \right\rceil + 1\\
&e_f(0) = e_f(1) = 2\left\lceil \tfrac{n+2}{2} \right\rceil + 2
\end{aligned}
$$

Kasus 2. Untuk n genap.

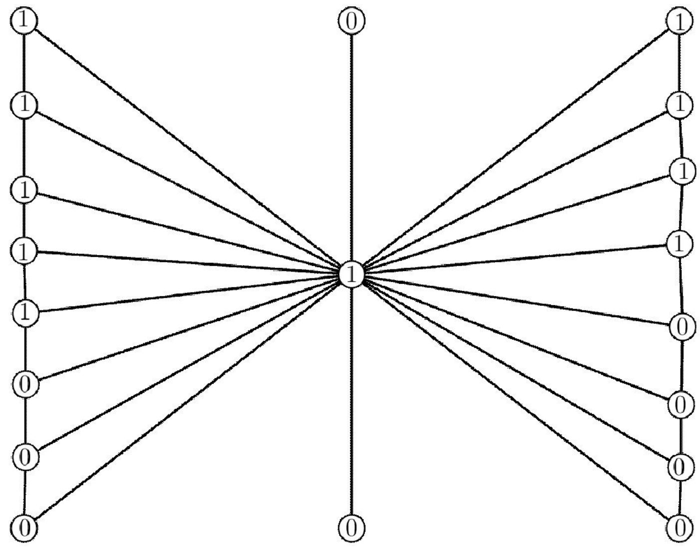
$$
\begin{aligned}
&f(w_0) = 1\\
&f(w_i) = 0,\, 1 \le i \le 2\\
&f(u_i) = 1,\, 1 \le i \le \left\lceil \tfrac{n+3}{2} \right\rceil\\
&f(u_i) = 0,\, \left\lceil \tfrac{n+3}{2} \right\rceil + 1 \le i \le n+2\\
&f(v_i) = 1,\, 1 \le i \le \tfrac{n+2}{2}\\
&f(v_i) = 0,\, \tfrac{n+2}{2} + 1 \le i \le n+2
\end{aligned}
$$

Dengan pelabelan f di atas, diperoleh bahwa:

$$
\begin{aligned}
&v_f(1) = v_f(0) - 1 = 2\left\lceil \tfrac{n+3}{2} \right\rceil - 1\\
&e_f(0) = e_f(1) = 2n + 4
\end{aligned}
$$

Sehingga untuk tiap kasus, diperoleh $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$. Oleh karena itu Dg_n adalah graf *product cordial.* ■

Ilustrasi 2. Perhatikan graf Dg_6. Pelabelan *product cordial* graf Dg_6 ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Pelabelan *Product Cordial* Graf Dg_6.

Teorema 3. Graf Dg_n adalah graf *product cordial* sisi.

Bukti:

Misalkan Dg_n adalah graf *dragonfly*.

Definisikan $f: E(Dg_n) \rightarrow \{0,1\}$, dimana Dg_n akan dibagi dalam dua kasus.

Kasus 1. Untuk n genap.

$$
\begin{aligned}
&f(w_0 w_i) = 1,\ 1 \leq i \leq 2\\
&f(w_0 u_i) = 0,\ 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\\
&f(w_0 u_i) = 1,\ \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil + 1 \leq i \leq n+2\\
&f(w_0 v_i) = 0,\ 1 \leq i \leq \frac{n+2}{2}\\
&f(w_0 v_i) = 1,\ \frac{n+2}{2} + 1 \leq i \leq n+2\\
&f(u_i u_{i+1}) = 0,\ 1 \leq i \leq \frac{n+2}{2}\\
&f(u_i u_{i+1}) = 1,\ \frac{n+2}{2} \leq i \leq n+1\\
&f(v_i v_{i+1}) = 0,\ 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\\
&f(v_i v_{i+1}) = 0,\ \frac{n}{2} \leq i \leq n+1
\end{aligned}
$$

Dengan pelabelan f di atas, diperoleh bahwa:

$$
\begin{aligned}
&v_f(1) = v_f(0) + 1 = 2\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil + 1\\
&e_f(0) = e_f(1) = 2\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil + 2
\end{aligned}
$$

Kasus 2. Untuk n genap.

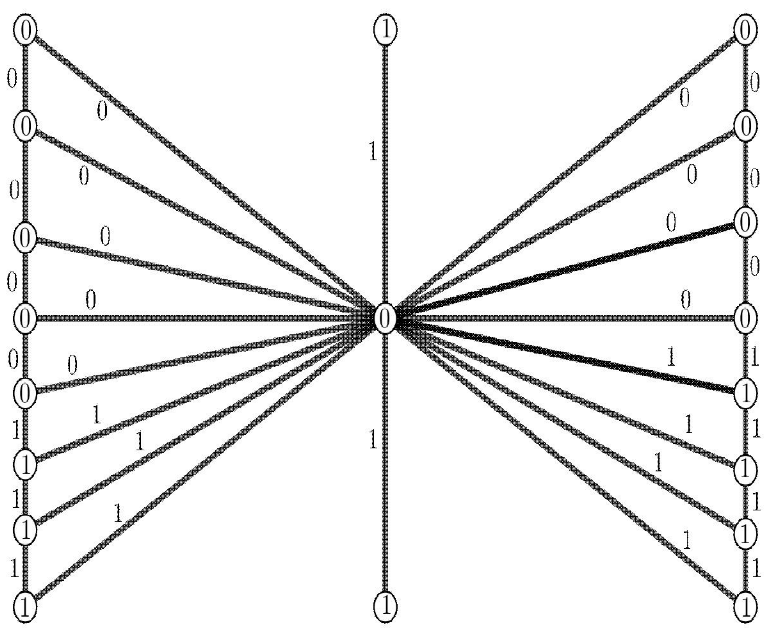
$$f(w_0) = 1$$
$$f(w_i) = 0,\ 1 \le i \le 2$$
$$f(u_i) = 1,\ 1 \le i \le \left\lceil \tfrac{n+3}{2} \right\rceil$$
$$f(u_i) = 0,\ \left\lceil \tfrac{n+3}{2} \right\rceil + 1 \le i \le n+2$$
$$f(v_i) = 1,\ 1 \le i \le \tfrac{n+2}{2}$$
$$f(v_i) = 0,\ \tfrac{n+2}{2} + 1 \le i \le n+2$$

Dengan pelabelan f di atas, diperoleh bahwa:

$$v_f(1) = v_f(0) - 1 = 2\left\lceil \tfrac{n+3}{2} \right\rceil - 1$$
$$e_f(0) = e_f(1) = 2n + 4$$

Sehingga untuk tiap kasus, diperoleh $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$. Oleh karena itu Dg_n adalah graf *product cordial.* ■

Ilustrasi 4. Perhatikan graf Dg_6. Pelabelan *product cordial* sisi graf Dg_6 ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Pelabelan *Product Cordial* Graf Dg_6.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, telah dibuktikan bahwa graf *dragonfly* Dg_n merupakan graf *product cordial* dan juga graf *product cordial* sisi.

REFERENSI

[1] A. Kotzig, 1973, On Certain Vertex Valuations of Finite Graphs, *Util. Math*, 4, pp. 67-73.

[2] A. Rosa., 1964, On Certain Valuations of the Vertices of the Graph, *in Theory of graphs* (International Symposium, Roma, Juli 1963), pp. 349-355.

[3] G. Chartrand dan L. Lesniak., 2004, *Graphs and Digraphs*, Chapman & Hall, New York.

[4] I. Cahit, 1987, Cordial graphs: A Weaker Version of Graceful and Harmonious Graphs, *Ars Combinatoria*, 23, pp. 201-207.

[5] J.A. Gallian, 2016, A Dinamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16#DS6.

[6] M. Sundaram, R. Ponraj dan S. Somasundaram., 2004, Product Cordial Labeling of Graphs, *Bull. Pure and Aplied Sciences* (*Mathematics and Statistics*), 23E, pp. 155-163.

[7] S. W. Golomb., 1972, How to Number a Graph, *in Graph Theory and Computing* (diedit oleh R. C. Read), Academic Press, New York, pp. 23-37.

[8] S. K. Vaidya dan K.K Kanani., 2010, Some Cycle Related Product Cordial Graphs, *Internasional Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*, Vol.3, No.1, pp. 109-116.

[9] S. K. Vaidya dan C. M. Barasara., 2011, Product Cordial Labeling for Some New Graphs, *Journal of Mathematics Research*, Vol.3, No.2, pp. 206-211.

[10] S. K. Vaidya dan C. M. Barasara., 2012, Edge Product Cordial Labeling of graphs, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2(5), pp. 1436-1450.

[11] S. K. Vaidya dan C. M. Barasara., 2013, Some New Families of Edge Product cordial Graphs, *Advanced Modelling and Optimization*, Vol.15, No.1, pp. 103-111.

[12] S. K. Vaidya dan C. M. Barasara., 2013, Some Edge Product cordial Graphs, *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, Vol.3, No.3, pp. 49-53.

[13] Z.B. Gao, G.Y. Sun, Y.N. Sun, Y. Meng dan G.C. Lau., 2015, Product Cordial and Total Product Cordial Labeling of $\boldsymbol{P_{n+1}^{m}}$, *Journal of Discrete Mathematics*, Vol.2015, ID 512696.