Jurnal "LOG!K@" , Jilid 8, No. 1, 2018, Hal. 36 - 49
ISSN 1978 – 8568

PERBANDINGAN PENYELESAIAN MASALAH TRANSPORTASI SATU KENDARAAN DAN MASALAH TRANSPORTASI DUA KENDARAAN MENGGUNAKAN *NORTH WEST CORNER METHOD*

Elis Ratna Wulan dan **Al Fataa Waliyyul Haq**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati Bandung
Email: elis_ratna_wulan@uinsgd.ac.id

Abstract: In this research, we present a model to solve the problem of transportation of one and two vehicle. In this model the transportation cost may vary due to the vehicle capacity and the quantity of the transportation type. The algorithm for determining the initial feasible solution will help us to find the feasible initial solution of both cases, so that it can be determined which case that yield the minimum trasportation cost. The algorithm is started from diagnose the problem, creating a transport matrix, allocating goods from source to destination using the northwest corner method, finding the unit cost of transportation, and finding the initial feasible solution. The comparison of these cases will show which transportation is more effective in goods distribution. Based on the total cost, the two vehicles case yield 92 unit cost, while the one vehicle case yield 641 unit cost for the first vehicle type and 1255 unit cost for the second vehicle type. Therefore, we conclude that the two-vehicle transportation method yields the smaller transportation cost than the one-vehicle transportation method.
Keywords: one-vehicle transportation problem, two-vehicle transportation problem, North West Corner method, basic cell, alocation.

Abstrak: Pada penelitian ini akan disajikan model untuk memecahkan masalah transportasi satu kendaraan dan masalah transportasi dua kendaraan. Pada model ini biaya transportasi bisa bervariasi disebabkan oleh kapasitas kendaraan dari masing-masing masalah serta kuantitas dari jenis transportasi. Algoritma untuk menentukan solusi layak awal akan membantu dalam pencarian solusi layak awal dari kedua masalah tersebut, sehingga dapat diketahui mana biaya transportasi yang lebih minimum. Dimulai dari mendiagnosis masalah, membuat matriks transportasi, mengalokasikan barang dari sumber ke tujuan menggunakan metode sudut barat laut, mencari biaya unit transportasi, sampai akhirnya menemukan solusi layak awal. Perbandingan akan menunjukan berapa jenis kendaraan yang lebih efektif untuk digunakan dalam pendistribusian barang. Dari melihat total biaya transportasi dari kedua contoh kasus diketahui bahwa dengan metode transportasi dua kendaraan total biaya transportasi adalah 92 satuan biaya sedangkan dengan metode transportasi satu kendaraan total biaya trasnportasi adalah 641 satuan biaya untuk kendaraan jenis kesatu dan 1255 satuan biaya untuk kendaraan jenis kedua. Sehingga penentuan biaya transportasi dengan metode transportasi dua kendaraan jauh lebih kecil dibandingkan dengan menggunakan metode transportasi satu kendaraan.
Kata kunci: masalah transportasi satu kendaraan, masalah transportasi dua kendaraan, metode *North West Corner*, sel dasar, alokasi.

PENDAHULUAN

Jual beli yang terjadi dari zaman dulu sampai sampai sekarang terus mengalami kemajuan. Mulai dari alat tukar, jumlah barang, hingga pendistribusian barang. Pendistribusian untuk memenuhi kebutuhan konsumen ini merupakan aktivitas yang terjadi pada bidang industri. Perkembangan industri semakin hari semakin pesat. Hal ini terlihat dari kian rumitnya permasalahan di bidang industri. Perusahaan-perusahaan kecil yang cakupan distribusinya tidak begitu luas hingga perusahaan-perusahaan besar yang cakupan distribusinya sampai lintas negara, sama-sama memiliki masalah transportasi.

Masalah Transportasi berkaitan dengan distribusi komoditi dari berbagai sumber pasokan ke berbagai tujuan permintaan sedemikian rupa sehingga biaya transportasi total diminimumkan. Untuk memcahkan masalah transportasi parameter keputusan seperti ketersediaan, kebutuhan, dan biaya transportasi unit model harus tetap. Namun dalam kehidupan nyata biaya transportasi unit aplikasi bisa berbeda. Biaya unit akan tergantung dari jumlah transportasi dan kapasitas kendaraan. Jika jumlahnya kecil maka kendaraan (kapasitas) kecil akan cukup untuk mengantarkan barang. Sedangkan jika jumlahnya besar maka kendaraan (kapasitas) besar sangat dibutuhkan [3].

Masalah transportasi akan lebih kompleks atau rumit ketika keterbatasan pasokan atau permintaan yang melebihi pasokan terjadi. Cara mengatasinya yaitu dengan adanya Riset Operasi (*Operation Research*/OR). Riset operasi adalah sesuatu yang berusaha menetapkan arah tindakan terbaik (optimum) dari sebuah masalah keputusan di bawah pembatasan sumber daya yang terbatas [1]. Artinya walaupun sumber dayanya terbatas, akan tetapi masih bisa untuk memperoleh hasil yang optimal. Ini berkaitan dengan matematika optimisasi. Matematika optimisasi adalah cabang ilmu yang berkaitan dengan pemilihan suatu nilai alternatif [8].

Permasalahan transportasi bisa diatasi dengan riset operasi, salah satunya yaitu dengan metode sudut barat laut untuk memperoleh solusi layak awal. Solusi layak awal ini merupakan hasil awal berupa biaya distribusi minimum sementara. Sementara karena ada metode lain untuk menguji apakah biaya distribusi tersebut sudah benar-benar minimum atau belum. Permintaan yang banyak dari berbagai tujuan mengahruskan suatu perusahaan mencari cara untuk benar-benar meminimukan biaya distribusi. Salah satu caranya yaitu dengan menggunakan dua jenis kendaraan dengan kapasitas yang berbeda. Dalam metode untuk mencari solusi layak awal pasti terdapat perbedaan apabila hanya menggunakan satu jenis kendaraan dengan menggunakan dua jenis kendaraan.

LANDASAN TEORI

1. Model Transportasi

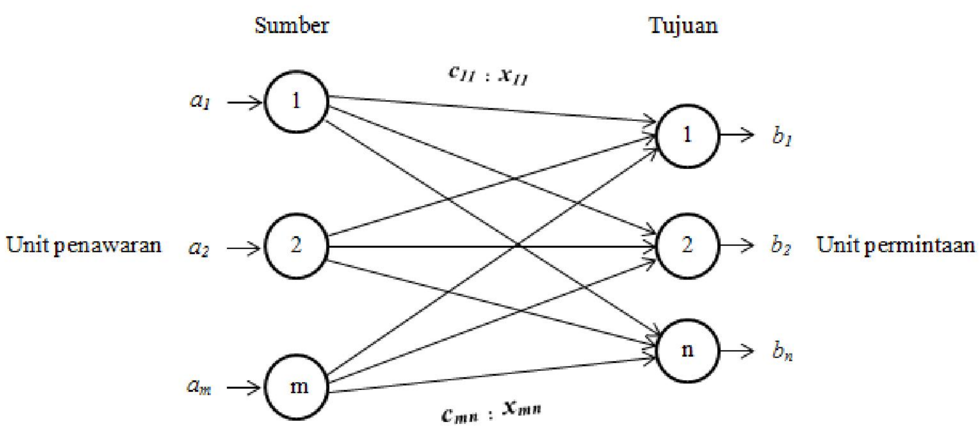
Secara khusus model transportasi berkaitan dengan masalah pendistribusian barang-barang dari pusat-pusat pengiriman atau sumber ke pusat-pusat penerimaan atau tujuan. Persoalan yang ingin dipecahkan oleh model transportasi adalah penentuan distribusi barang yang akan meminimumkan biaya total distribusi [1]. Dengan kata lain, model transportasi memecahkan masalah pendistribusian barang dari sumber ke tujuan dengan biaya total distribusi minimum [1]. Mengacu kepada [2] data dalam model ini mencakup tingkat penawaran di setiap sumber dan jumlah permintaan di setiap tujuan, dan biaya transportasi per unit barang dari setiap sumber ke setiap tujuan.

Asusmsi dasar dari model ini adalah bahwa biaya transportasi di sebuah rute tertentu adalah proporsional secara langsung dengan jumlah unit yang dikirimkan. Definisi "unit transportasi" akan bervariasi bergantung pada jenis "barang" yang dikirimkan. Misalnya, kita dapat membicarakan unit transportasi sebagai setiap balok baja yang diperlukan untuk membangun jembatan. Dapat juga menggunakan beban truk dari sebuah barang sebagai unit transportasi. Bagaimanapun juga, unit penawaran dan permintaan harus konsisten dengan definisi kita "unit yang dikirimkan" [2]. Selain itu, sebuah tujuan dapat menerima permintaannya dari satu sumber atau lebih. Begitupun sebaliknya, sebuah sumber dapat mengirimkan penawarannya ke satu tujuan atau lebih.

Gambar 1 memperlihatkan sebuah model transportasi dari sebuah jaringan dengan m sumber dan n tujuan. Sebuah sumber atau tujuan diwakili dengan sebuah *node*. *Busur* yang menghubungkan sebuah sumber dan sebuah tujuan mewakili rute pengiriman barang tersebut. Jumlah penawaran di sumber i adalah a_i dan permintaan di tujuan j adalah b_j. Biaya unit transportasi antara sumber i dan tujuan j adalah c_{ij} [2].

Anggaplah x_{ij} mewakili jumlah barang yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j, maka model yang mewakili masalah transportasi ini diketahui secara umum sebagai [2]:

$$\left.\begin{array}{l} min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{dengan batasan} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1,2,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1,2,\dots,n \end{array}\right\} \tag{1}$$



Gambar 1. Model Transportasi Jaringan [2].

Batasan pertama menetapkan bahwa jumlah pengiriman dari sebuah sumber tidak dapat melebihi penawarannya. Demikian pula batasan kedua mengharuskan bahwa jumlah pengiriman ke sebuah tujuan harus memenuhi permintaannya [2]. Model yang digambarkan di atas menyiratkan bahwa penawaran total $\sum_{i=1}^{m} a_i$ harus setidaknya sama dengan permintaan total $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Ketika penawaran total sama dengan permintaan total, formulasi yang dihasilkan disebut model transportasi berimbang (*balanced transportation model*) [2]. Model ini berbeda dengan model di atas hanya dalam fakta bahwa semua batasan adalah persamaan yaitu: [5]

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall_i, \forall_j \end{array}\right\} \tag{2}$$

Dalam kehidupan nyata, tidak selalu dapat dipastikan bahwa penawaran sama dengan permintaan atau melebihinya. Tetapi, sebuah model transportasi dapat selalu berimbang. Pengimbangan ini, di samping kegunaannya dalam pemodelan situasi praktis tertentu, adalah penting untuk pengembangan sebuah metode pemecahan yang sepenuhnya memanfaatkan struktur khusus dari model transportasi ini [2].

1.1. Masalah Keseimbangan Penawaran dan Permintaan

Di dalam model transportasi, kemampuan sumber-sumber untuk melayani atau $\sum_{i=1}^{m} a_i$ belum tentu sama dengan tingkat permintaan tujuan-tujuan untuk dilayani atau $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Sehingga ada tiga kemungkinan yang akan terjadi, yaitu [1]

1. $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$,
2. $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$,
3. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Kemungkinan **pertama** akan terjadi bila seluruh kemampuan sumber-sumber untuk mengirim barang melampaui tingkat permintaan yang ada. Dalam kasus ini, satu atau lebih sumber mungkin hanya akan mengirim barang sebagian atau tidak mengirim sama sekali. Kemungkinan **kedua** akan terjadi bila seluruh kapasitas permintaan dipenuhi seluruh sumber-sumber yang tersedia. Dalam kasus ini jelas akan ada permintaan dari satu atau lebih tujuan yang akan dipenuhi sebagian atau tidak dipenuhi sama sekali. Kemungkinan **ketiga** akan terjadi bila seluruh kapasitas permintaan untuk mengirim barang sama persis dengan seluruh permintaan tujuan. Dalam kasus ini seluruh kemampuan sumber-sumber untuk melayani permintaan tepat digunakan seluruhnya dan seluruh permintaan tujuan-tujuan dapat dipenuhi [1].

1.2 Matriks Transportasi

Model adalah gambaran sederhana dari sebuah kasus yang dapat membantu kita untuk berpikir secara sistematis dan cepat untuk memahami kasus tersebut. Model transportasi menggunakan sarana sebuah matriks untuk memberikan gambaran mengenai kasus distribusi. Bentuk umum sebuah matriks transportasi diperlihatkan pada tabel 1 [1].

Sebuah matriks transportasi memilik *m* baris dan *n* kolom. Sumber-sumber berjajar pada baris ke-1 hingga ke-*m,* sedang tujuan-tujuan berbanjar pada kolom ke-1 hingga ke-*n.* Dengan demikian [1]:

x_{ij} : jumlah unit dalam satuan barang yang akan diangkut dari sumber *i* ke tujuan j [6],

c_{ij} : biaya angkut persatuan barang dari sumber *i* ke tujuan *j* [9],

sehingga secara matematis matriks tersebut memiliki persamaan (1) dengan batasannya di mana $x_{ij} \geq 0$.

Penyelesaian persoalan ini akan menghasilkan x_{ij} optimal yaitu x_{ij} yang akan memenuhi (2) serta membuat (1) minimum. Dengan kata lain, x_{ij} optimal adalah distribusi optimal yang akan meminimumkan biaya distribusi total [1].

1.3. Algoritma Transportasi

Model transportasi, pada saat dikenalkan pertama kali, diselesaikan secara manual dengan menggunakan algoritma yang dikenal sebagai algoritma transportasi. Algoritma ini cukup dikenal dan masih sering diajarkan hingga tahun 90-an. *Flowchart* algoritma transportasi ini bisa dilihat pada gambar 2 [1].

Pertama, diagnosis masalah dimulai dengan pengenalan sumber, tujuan, parameter, dan variabel [1].

Kedua, seluruh informasi tersebut kemudian dituangkan ke dalam matriks transportasi. Dalam hal ini [1]:

a. Bila kapasitas seluruh sumber lebih besar dari permintaan seluruh tujuan maka sebuah kolom semu (*dummy*) perlu ditambahkan untuk menampung kelebihan kapasitas itu.

Bila kapasitas seluruh sumber lebih kecil dari seluruh permintaan tujuan maka sebuah baris semu perlu ditambahkan untuk menyediakan kapasitas semu yang akan memenuhi kelebihan permintaan itu. Jelas sekali bahwa kelebihan permintaan itu tidak bisa dipenuhi.

Tabel 1. Matriks Transportasi [1]

SUMBER	TUJUAN				Kapasitas sumber per periode
	B_1	B_2	. . .	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . .	c_{mn} x_{mn}	a_m
Kebutuhan tujuan per periode	b_1	b_2	. . .	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

Ketiga, setelah matriks transportasi terbentuk kemudian dimulai menyusun tabel awal. Algoritma transportasi mengenal empat macam metode untuk menyusun tabel awal, yaitu [1]

1. Metode Biaya Terkecil atau *Least Cost Method*.
2. Metode Sudut Barat Laut atau *North West Corner Method*.
3. RAM atau *Russell's Approximation Method*.
4. VAM atau *Vogell's Approximation Method.*

Keempat metode ini masing-masing berfungsi untuk menentukan alokasi distribusi awal yang akan membuat seluruh kapasitas sumber teralokasikan ke seluruh tujuan. Secara matematis, penyusunan tabel awal ini dilakukan untuk menjamin pemenuhan kendala-kendala (1)

Keempat, setelah penyusunan tabel awal selesai maka sebagai langkah selanjutnya adalah pengujian optimalitas tabel untuk mengetahui apakah biaya distribusi total telah minimum. Secara matematis, pengujian ini dilakukan untuk menjamin bahwa nilai fungsi tujuan minimum (1) telah tercapai. Ada dua macam model pengujian optimalitas algoritma transportasi [1]

1. *Stepping Stone Method*
2. MODI atau *Modified Distribution Method*

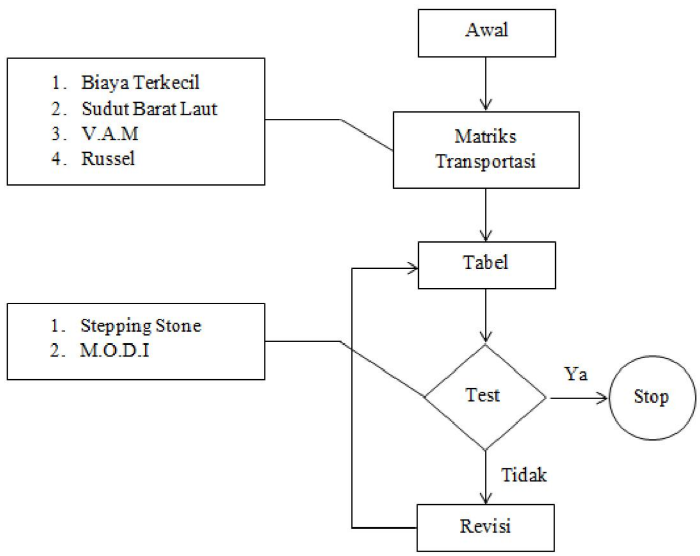
Kelima, atau langkah yang terakhir adalah revisi tabel bila dalam langkah keempat terbukti bahwa tabel belum optimal atau biaya distribusi total masih mungkin diturunkan lagi. Dengan

demikian, jelas sekali bahwa langkah kelima ini tidak akan dilakukan apabila pada langkah keempat telah membuktikan bahwa tabel telah optimal [1].
Gambar 2 menerangkan langkah-langkah pencarian biaya minimasi transportasi [1].

PEMBAHASAN

1. Transportasi Dua Kendaraan

Misalkan ada dua jenis kendaraan V_1, V_2 dari setiap sumber ke setiap tujuan. Misal K_1 dan $K_2(>K_1)$ adalah kapasitas (dalam unit) dari kendaraan V_1 dan V_2 berturut-turut, $K_1 \leq r_{ij}$ dan $K_2 \leq r_{ij}$ $\forall_{i,j}$. $R_{ij} = (R^1_{ij}, R^2_{ij})$ menunjukan biaya transportasi untuk setiap sel (i,j); di mana R^1_{ij} adalah biaya transportasi dari sumber A_i, $i = 1, ..., m$ ke tujuan B_i, $j = 1, ..., n$ dengan kendaraan V_1. Dan R^2_{ij} adalah biaya transportasi dari sumber A_i, $i = 1, ..., m$ ke tujuan B_i, $j = 1, ..., n$ dengan kendaraan V_2. Jadi, masalah variasi biaya transportasi bisa ditunjukan pada tabel 2.



Gambar 2. Flow Chart Algoritma Transportasi [1].

Tabel 2. Masalah Transportasi Dua Kendaraan [4].

	B_1	B_2	...	B_n	Penawaran
A_1	R^1_{11}, R^2_{11}	R^1_{12}, R^2_{12}	...	R^1_{1n}, R^2_{1n}	a_1
A_2	R^1_{21}, R^2_{21}	R^1_{22}, R^2_{22}	...	R^1_{2n}, R^2_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	R^1_{m1}, R^2_{m1}	R^1_{m2}, R^2_{m2}	...	R^1_{mn}, R^2_{mn}	a_m
Permintaan	b_1	b_2	...	b_n	

Untuk memecahkan masalah transportasi dua kendaraan, langkah-langkah-nya adalah:
Langkah 1: Diagnosis masalah dimulai dengan pengenalan sumber, tuju-an, parameter, dan variabel [1].

Langkah 2: Seluruh informasi tersebut kemudian dituangkan ke dalam matriks transportasi. Dalam hal ini, periksa apakah jumlah penawaran sama dengan jumlah permintaan,

a. Bila kapasitas seluruh sumber lebih besar dari permintaan seluruh tujuan maka sebuah kolom semu (*dummy*) perlu ditambahkan untuk menampung kelebihan kapasitas itu.
b. Bila kapasitas seluruh sumber lebih kecil dari seluruh permintaan tujuan maka sebuah baris semu perlu ditambahkan untuk menyediakan kapasitas semu yang akan memenuhi kelebihan permintaan itu. Jelas sekali bahwa kelebihan permintaan itu tidak bisa dipenuhi.

Langkah 3: Setelah matriks transportasi terbentuk, selanjutnya adalah mencari x_{ij}. Saat biaya unit belum ditentukan (karena bergantung pada jumlah transportasi) jadi metode sudut barat laut (karena tidak bergantung pada biaya unit transportasi) bisa digunakan untuk mencari solusi layak awal [3].

Langkah 4: Setelah mencari x_{ij} dengan metode sudut barat laut, untuk sel dasar (sel yang teralokasikan barang) akan ditentukan c_{ij} (biaya unit transportasi dari sumber A_i ke tujuan B_j) dengan cara sebagai berikut [3].

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p1_{ij} + R1_{ij} + p2_{ij} R2_{ij}}{x_{ij}}, & \text{jika } x_{ij} \neq 0 \\ 0, & \text{jika } x_{ij} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

dimana $p1_{ij}$, $p2_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ adalah solusi bilangan bulat dari min $p1_{ij}R1_{ij}+p2_{ij}R2_{ij}$ dengan batas $x_{ij} \leq p1_{ij}K1_{ij} + p2_{ij}K2_{ij}$.

Langkah 5 : Menentukan solusi layak awal.

Langkah 6 : Membuat tabel biaya unit transportasi.
Dengan cara ini masalah transportasi dua kendaraan bisa dirubah menjadi seperti masalah transportasi satu kendaraan tapi c_{ij} belum pasti, karena masih bisa berubah (ketika alokasinya belum optimal) selama uji optimalitas [3]. Flowchart pada Gambar 3 menerangkan langkah-langkah pencarian biaya minimasi transportasi dua kendaraan menggunakan metode sudut barat laut.

2. Contoh Kasus

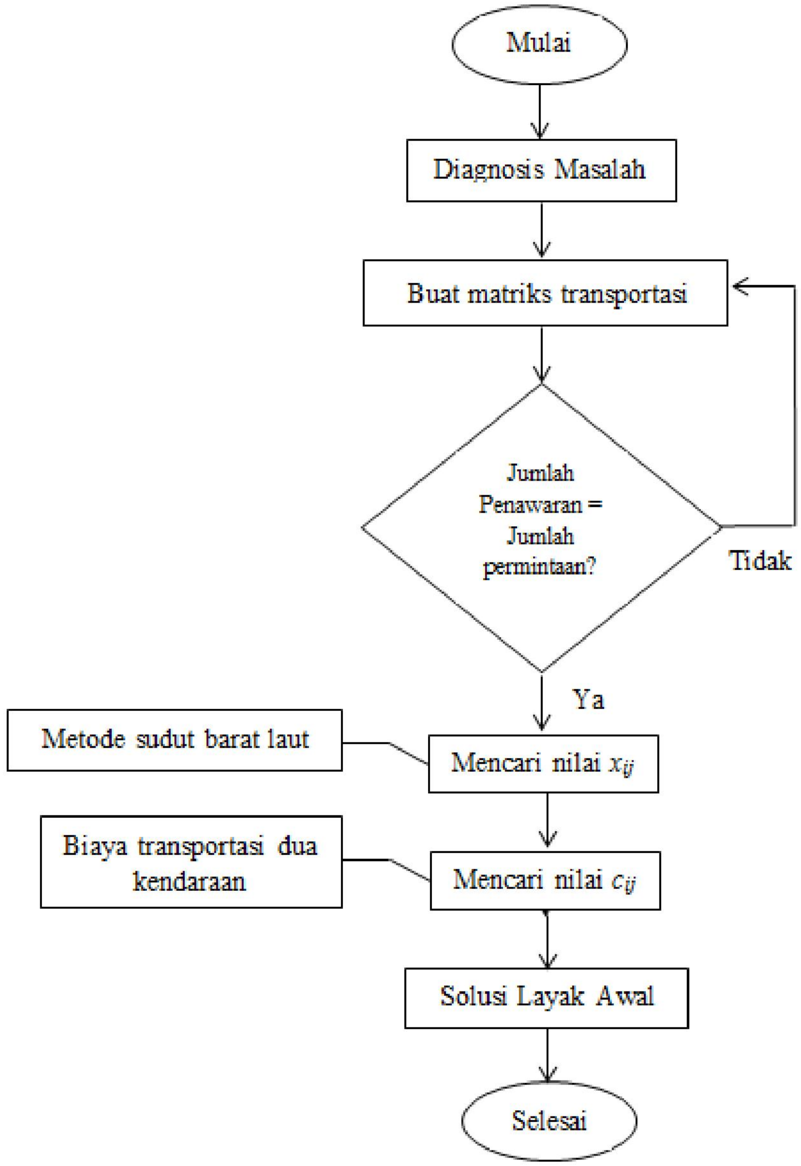
2.1 Penyelesaian Contoh Kasus Masalah Biaya Transportasi Dua Kendaraan

Diketahui penawaran dari ketiga pabrik A_1 = 48, A_2 = 52, dan A_3 = 25. Sedangkan permintaan dari tiga pusat distribusi adalah B_1 = 75, B_2 = 30, dan B_3 = 20. Biaya trasnportasi dua jenis kendaraan dari pabrik ke pusat distribusi tersebut adalah sebagai berikut:

a) V_1 :
$A_1B_1 = 4$, $A_1B_2 = 5$, $A_1B_3 = 10$
$A_2B_1 = 2$, $A_2B_2 = 8$, $A_2B_3 = 6$
$A_3B_1 = 7$, $A_3B_2 = 3$, $A_3B_3 = 9$

b) V_2 :
$A_1B_1 = 8$, $A_1B_2 = 10$, $A_1B_3 = 20$
$A_2B_1 = 3$, $A_2B_2 = 16$, $A_2B_3 = 12$
$A_3B_1 = 14$, $A_3B_2 = 6$, $A_3B_3 = 18$
dengan
A_m = Pabrik atau pusat produksi
B_n = Tujuan atau pusat distribusi
V_1 = Kendaraan jenis ke-1

V_2 = Kendaraan jenis ke-2
dan
K1 (kapasitas transportasi kendaraan jenis ke-1) = 6
K2 (kapasitas transportasi kendaraan jenis ke-2) = 18



Gambar 3. Flowchart Transportasi Dua Kendaraan.

Langkah 1, setelah menganalisis kasus dari masalah transportasi tersebut maka, diketahui bahwa penawaran total (48 + 52 + 25 = 125) sama dengan permintaan total (75 + 30 + 20 = 125). Karena penawaran total sama dengan permintaan total maka model transportasi yang dihasilkan adalah model trasnportasi yang berimbang. Jadi model yang mewakili masalah transportasi ini memiliki batasan yang semuanya berbentuk persamaan:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & & & = 48 \\
 & + x_{21} + x_{22} + x_{23} & & & & = 52 \\
 & & + x_{31} + x_{32} + x_{33} & & & = 25 \\
x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & & & = 75 \\
+ x_{12} & + x_{22} & + x_{32} & & & = 30 \\
+ x_{13} & + x_{23} & + x_{33} & & & = 20
\end{array}
$$

$x_{ij} \geq 0$, untuk semua i dan j.

Langkah 2, dari masalah transportasi tersebut dapat dibuat sebuat matriks transportasi sebagai berikut:

Tabel 3. Matriks Transportasi Masalah Biaya Transportasi Dua Kendaraan [3].

	B_1	B_2	B_3	Penawaran
A_1	4, 8	5, 10	10, 20	48
A_2	2, 3	8, 16	6, 12	52
A_3	7, 14	3,6	9, 18	25
Permintaan	75	30	20	125

Langkah 3, setelah matriks transportasi terbentuk kemudian dimulai menyusun tabel awal atau tabel alokasi barang menggunakan metode sudut barat laut. Sel 11 dari tabel 3, menurut metode sudut barat laut harus memperoleh alokasi terlebih dahulu karena terletak paling atas. Di sel ini seluruh kemampuan A_1 didistribusikan ke B_1. Seperti pada tabel 4. Tapi permintaan B_1 masih belum terpenuhi yaitu sebanyak 27 lagi.

Tabel 4. Metode Sudut Barat Laut, seluruh kapasitas A_1 didistribusikan ke B_1.

Sumber	Tujuan			Penawaran
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11} **48**	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	**48**
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	52
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	25
Permintaan	75	30	20	125 / 125

Keterangan : Sel yang terpenuhi
Sel yang belum terpenuhi

Kini, sel 21 menjadi sel yang terletak paling kiri atas setelah alokasi distribusi tidak mungkin lagi dilakukan di baris ke-1 karena seluruh kemampuan A_1 telah dialokasikan ke B_1.

Permintaan B_1 akhirnya harus dipenuhi oleh sebagian penawaran dari A_2, sehingga penawaran dari A_2 berkurang menjadi 25 lagi. Seperti pada tabel 5.

Tabel 5. Metode Sudut Barat Laut, permintaan B_1 terpenuhi.

Sumber	Tujuan			Penawaran
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11} **48**	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	**48**
A_2	c_{21} **27**	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	52
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	25
Permintaan	**75**	30	20	125 / 125

Sel yang terletak paling kiri atas setelah alokasi distribusi tidak mungkin lagi dilakukan pada baris dan kolom pertama adalah sel 22. Di sel ini alokasi distribusi maksimum adalah 25, yaitu sesuai dengan kemampuan maksimum A_2. Setelah alokasi distribusi tidak mungkin lagi dilakukan pada baris pertama dan kedua serta kolom pertama, maka sel 32 kini berada pada posisi paling kiri atas. Oleh karena itu, akan dialokasikan dari A_3 ke B_2 sebesar 5, seperti pada tabel 6. Yang terakhir mengalokasikan sisa penawaran A_3 ke B_3 sehingga ter-bentuklah tabel awal. Seperti pada tabel 7.

Langkah 4, setelah diketahui nilai alokasi distribusi barang dari setiap sumber ke setiap tujuan x_{ij} dengan metode sudut barat laut maka, langkah selanjutnya yaitu mencari c_{ij}. Untuk sel dasar (sel yang teralokasikan barang) tentukan c_{ij} (biaya unit transportasi dari sumber A_i ke tujuan B_j) berdasarkan syarat (3) dengan $K1 = 6$ dan $K2 = 18$.

a. Untuk c_{11}
   Karena $x_{11} = 48$, maka diperoleh $p1_{11} = 2$ dan $p2_{11} = 2$.
   Masukan $p1_{11}$ dan $p2_{11}$ ke (3) diperoleh $c_{11} = (2 \text{ x } 4) + (2 \text{ x } 8) = 24$.
   Jika sudah minumum, maka $c_{11} = \frac{(2 \text{ x } 4) + (2 \text{ x } 8)}{48} = \frac{24}{48}$.
b. Untuk c_{21}
   Karena $x_{21} = 27$, maka diperoleh $p1_{21} = 0$ dan $p2_{21} = 2$.
   Masukan $p1_{21}$ dan $p2_{21}$ ke (3) diperoleh $c_{21} = (0 \text{ x } 2) + (2 \text{ x } 3) = 6$.
   Jika sudah minumum, maka $c_{ij} = \frac{(0 \text{ x } 2) + (2 \text{ x } 3)}{27} = \frac{6}{27}$.
c. Untuk c_{22}
   Karena $x_{22} = 25$, maka diperoleh $p1_{22} = 2$ dan $p2_{22} = 1$
   Masukan $p1_{22}$ dan $p2_{22}$ ke (3) diperoleh $c_{22} = (2 \text{ x } 8) + (1 \text{ x } 16) = 32$
   Jika sudah minumum, maka $c_{22} = \frac{(2 \text{ x } 8) + (1 \text{ x } 16\ )}{25} = \frac{32}{25}$
d. Untuk c_{32}
   Karena $x_{32} = 5$, maka diperoleh $p1_{32} = 1$ dan $p2_{32} = 0$
   Masukan $p1_{32}$ dan $p2_{32}$ ke (3) diperoleh $c_{32} = (1 \text{ x } 3) + (0 \text{ x } 6) = 3$
   Jika sudah minumum, maka $c_{32} = \frac{(1 \text{ x } 3) + (0 \text{ x } 6\ )}{5} = \frac{3}{5}$
e. Untuk c_{33}

Karena x_{33} = 20, maka diperoleh $p1_{33}$ = 1 dan $p2_{33}$ = 1
Masukan $p1_{33}$ dan $p2_{33}$ ke (3) diperoleh c_{33} = (1 x 9) + (1 x 18) = 27
Jika sudah minumum, maka $c_{33} = \frac{(1 \, x \, 9) + (1 \, x \, 18)}{20} = \frac{27}{20}$

Tabel 6. Metode Sudut Barat Laut, permintaan B_2 terpenuhi.

Sumber	Tujuan			Penawaran
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11} **48**	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	**48**
A_2	c_{21} **27**	c_{22} **25**	c_{23} x_{23}	**52**
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} **5**	c_{33} x_{33}	25
Permintaan	**75**	**30**	20	125 / 125

Tabel 7. Metode Sudut Barat Laut, permintaan B_3 terpenuhi.

Sumber	Tujuan			Penawaran
	B_1	B_2	B_3	
A_1	c_{11} **48**	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	**48**
A_2	c_{21} **27**	c_{22} **25**	c_{23} x_{23}	**52**
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} **5**	c_{33} **20**	**25**
Permintaan	**75**	**30**	**20**	125 / 125

Tabel 8. Tabel awal Menggunakan Metode Sudut Barat Laut [3]

	B_1	B_2	B_3	Penawaran
A_1	x_{11} = 48 4, 8	5, 10	10, 20	48
A_2	x_{21} = 27 2, 3	x_{22} = 25 8, 16	6, 12	52
A_3	7, 14	x_{32} = 5 3,6	x_{33} = 20 9, 18	25
Permintaan	75	30	20	125

Langkah 5, solusi layak awal dari kasus ini adalah:

$$min\ Z = (\tfrac{24}{48} \text{ x } 48) + (\tfrac{6}{27} \text{ x } 27) + (\tfrac{32}{25} \text{ x } 25) + (\tfrac{3}{5} \text{ x } 5) + (\tfrac{27}{20} \text{ x } 20) = 92$$

Langkah 6, setelah mengetahui solusi layak awal dan biaya transportasi dari setiap sel dasar, dapat dibuat tabel biaya distribusi (Tabel 9).

Tabel 9. Biaya Distribusi Masalah Trasnportasi Dua Kendaraan.

Sel	Biaya x Beban	Biaya
(1,1)	(24/48),- x 48	24,-
(2,1)	(6/27),- x 27	6,-
(2,2)	(32/25),- x 25	32,-
(3,2)	(3/5),- x 5	3,-
(3,3)	(27/20),- x 20	27,-
Total		92,-

2.2 Penyelesaian Contoh Kasus Masalah Biaya Transportasi Satu Kendaraan

Dari contoh kasus 2.1 akan dicari solusi layak awal untuk setiap jenis kendaraan (V_1 dan V_2). Karena matriks transportasi dan tabel alokasi barang atau tabel awal sudah diketahui, maka tinggal mencari solusi layak awal dari V_1 dan V_2.

a. Untuk V_2 :
dengan biaya unit tranportasi sebagai berikut,
$A_1B_1 = 4$, $A_1B_2 = 5$, $A_1B_3 = 10$
$A_2B_1 = 2$, $A_2B_2 = 8$, $A_2B_3 = 6$
$A_3B_1 = 7$, $A_3B_2 = 3$, $A_3B_3 = 9$
min $Z = (4 \text{ x } 48) + (2 \text{ x } 27) + (8 \text{ x } 25) + (3 \text{ x } 5) + (9 \text{ x } 20) = 641$

b. Untuk V_2 :
dengan biaya unit tranportasi sebagai berikut,
$A_1B_1 = 8$, $A_1B_2 = 10$, $A_1B_3 = 20$
$A_2B_1 = 3$, $A_2B_2 = 16$, $A_2B_3 = 12$
$A_3B_1 = 14$, $A_3B_2 = 6$, $A_3B_3 = 18$
$min\ Z = (8 \text{ x } 48) + (3 \text{ x } 27) + (16 \text{ x } 25) + (6 \text{ x } 5) + (18 \text{ x } 20)$
$= 384 + 81 + 400 + 30 + 360 = 1255$

Tabel 10. Biaya Distribusi Masalah Trasnportasi Satu Kendaraan (V_1).

Sel	Biaya x Beban	Biaya
(1,1)	4,- x 48	192,-
(2,1)	2,- x 27	54,-
(2,2)	8,- x 25	200,-
(3,2)	3,- x 5	15,-
(3,3)	9,- x 20	180,-
Total		641,-

Tabel 11. Biaya Distribusi Masalah Trasnportasi Satu Kendaraan (V_2)

Sel	Biaya x Beban	Biaya
(1,1)	8,- x 48	384,-
(2,1)	3,- x 27	81,-
(2,2)	16,- x 25	400,-
(3,2)	6,- x 5	30,-
(3,3)	18,- x 20	360,-
Total		1255,-

3. **Analisis Data**

Dari tabel 8 dapat diketahui bahwa semua *supply* sudah dialokasikan ke semua permintaan. Menggunakan metode Sudut Barat Laut semua tujuan men-dapatkan alokasi yang sesuai dengan permintaannya. Pada objek penelitian didapat, tujuan 1 mendapat *supply* dari sumber 1 sebanyak 48 dan dari sumber 2 sebanyak 27. Tujuan 2 mendapat *supply* dari sumber 2 sebanyak 25 dan dari sumber 3 sebanyak 5. Sedangkan Tujuan 3 mendapat *supplt* dari sumber 3 sebanyak 20.

Setelah semua *supply* dialokasikan dari ketiga sumber untuk ketiga tujuan, dari tabel 3.8, dapat diketahui bahwa dengan mengaplikasikan metode transportasi dua kendaraan pada objek penelitian, didapat biaya minimal. Dengan total biaya transportasi sebesar: $(\frac{24}{48} \text{ x } 48) + (\frac{6}{27} \text{ x } 27) + (\frac{32}{25} \text{ x } 25) + (\frac{3}{5} \text{ x } 5) + (\frac{27}{20} \text{ x } 20) = 92$ satuan biaya.

Sedangkan untuk tabel 10 dan 11 biaya minimal diperoleh dengan menggunakan metode transportasi satu kendaraan pada objek penelitian. Dari tabel 3.9, dapat diketahui total biaya transportasi sebesar: (4 x 48) + (2 x 27) + (8 x 25) + (3 x 5) + (9 x 20) = 641 satuan biaya. Adapun dari tabel 3.10, dapat diketahui total biaya transportasi sebesar: (8 x 48) + (3 x 27) + (16 x 25) + (6 x 5) + (18 x 20) = 1255 satuan biaya.

Dengan melihat total biaya transportasi dari kedua metode ini dapat diketahui secara jelas perbedaannya. Penentuan biaya trasnportasi dengan metode transportasi dua kendaraan jauh lebih kecil dibandingkan dengan menggunakan metode transportasi satu kendaraan. Artinya metode transportasi dua kendaraan sangat efektif dalam meminimalkan biaya transportasi. Oleh karena itu, metode transportasi dua kendaraan lebih baik dibandingkan dengan metode transportasi satu kendaraan.

Total biaya transportasi satu kendaraan bisa lebih besar dari pada biaya transportasi dua kendaraan disebabkan karena, pengiriman barang yang dilakukan oleh transportasi satu kendaraan frekuensinya lebih sering dibandingkan dengan transportasi dua kendaraan. Adapun total biaya transportasi kendaraan jenis dua lebih besar dari total biaya transportasi kendaraan jenis satu karena kendaraan jenis dua memiliki ukuran yang lebih besar dari kendaraan jenis satu, sehingga dibutuhkan biaya yang besar untuk bahan bakar dan perawatannya.

KESIMPULAN

Setelah melakukan analisis data pada contoh kasus yang diambil sebagai objek penelitian dalam studi literatur ini, penulis dapat menarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Cara menentukan solusi layak awal masalah transportasi dua kendaraan dengan menggunakan metode sudut barat laut yaitu sama hal nya dengan mencari solusi layak awal untuk masalah transportasi satu kendaraan. Pertama mencari nilai alokasi barang lalu dicari nilai minimumnya. Perbedaannya yaitu terletak pada pencarian biaya unit transportasi (c_{ij}). Pada metode transportasi satu kendaraan biaya unit transportasi sudah diketahui, sedangkan pada metode transportasi dua kendaraan biaya unit transportasi harus dicari terlebih dahulu dengan metode transportasi dua kendaraan.
2. Biaya minimum dari masalah transportasi dua kendaraan dengan total biaya transportasi sebesar: $(\frac{24}{48}$ x $48)$ + $(\frac{6}{27}$ x $27)$ + $(\frac{32}{25}$ x $25)$ + $(\frac{3}{5}$ x $5)$ + $(\frac{27}{20}$ x $20)$ = 92 satuan biaya. Sedangkan biaya minimum dari masalah transportasi satu kendaraan pada jenis kendaraan pertama sebesar: (4 x 48) + (2 x 27) + (8 x 25) + (3 x 5) + (9 x 20) = 641 satuan biaya. Dan biaya minimum dari masalah transportasi satu kendaraan pada jenis kendaraan kedua sebesar: (8 x 48) + (3 x 27) + (16 x 25) + (6 x 5) + (18 x 20) = 1255 satuan biaya. Sehingga penentuan biaya trasnportasi dengan metode transportasi dua kendaraan jauh lebih kecil dibandingkan dengan menggunanken metode transportasi satu kendaraan.

REFERENSI

[1] Siswanto, 2007, Operations Research, jilid 1, Jakarta: Erlangga.
[2] Taha, Hamdy A, 1996, Operations Research. Jakarta : Binarupa Aksara.
[3] Panda Arpita, dan Das Bikash Chandan, 2004, Capacitated Transportation Problem under 2-Vehicle. *AMO – Advanced Modeling and Optimization*, Volume 16, No. 1, ISSN: 1841-4311. Hal: 73-91.
[4] Panda Arpita, dan Das Bikash Chandan, 2013, Cost Varying Interval Transportation Problem Under Two Vehicle. *Journal of New Results in Science* 3:19-37. ISSN: 1304-7981.
[5] Panda Arpita, dan Das Bikash Chandan, 2013, N-Vehicle Cost Varying Transportation Problem. *AMO – Advanced Modeling and Optimization*, Volume 15, No. 3, ISSN: 1841-4311. Hal: 583-610.
[6] Gupta, K. and Arora, S. R., 2012, An algorithm to find optimum cost time trade of pairs in a fractional capacitated transportation problem with restricted flow, *International Journal Of Research In Social Sciences*, 2(2), 418-436.
[7] Das, A. Basu, M. dan Acharya, D., 2013, Fixed Charge Capacitated Non-Linear Transportation Problem. *Journal of Engineering, Computers & Applied Sciences* (*JEC&AS*), Volume 2, No. 12, ISSN No: 2319-5606. Hal 49-54.
[8] Arya, N. V., 2015, *Lexicographic Approach for Quadratic Transportation Problem with Additional Restriction*. Department of Physics and Computer Science Faculty of Science Dayalbagh Educational Institute. Dayalbagh, Agra, Hal: 1-19.
[9] Gupta, K., 2014, An Algorithm for Solving a Capacitated Indefinite Quadratic Transportation Problem with Enhanced Flow, *Yugoslav Journal of Operation Research* 24, Number 2, 217-236.
[10] Arora, S. R., 2004, Three Dimensional Fixed Charge Bi-Criterion Indefinite Quadratic Transportation Problem, *Yugoslav Journal of Operation Research* 14, Number 1, 83-97.