Jurnal "LOG!K@" , Jilid 7, No. 1, 2017, Hal. 61 - 72
ISSN 1978 – 8568

PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI-ANTI AJAIB SUPER PADA *t-COPY* GRAF RODA TERHUBUNG DAN APLIKASINYA

Alvina R. Meliala dan **Nur Inayah**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: vina2893@gmail.com

Abstract: A graph $\mathrm{G}(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ is called (a, d)-edge anti magic total labeling, if there exist integers $\mathrm{a} > 0, d \geq 0$, and a bijection $\lambda : \mathrm{V(G)} \cup \mathrm{E(G)} \rightarrow \{1,2, \ldots \mathrm{p} + \mathrm{q}\}$, such that $\mathrm{W} = \{\mathrm{w(xy)} | \mathrm{xy} \in \mathrm{E(G)}$, and $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{V(G)}\} = \{\mathrm{a}, \mathrm{a} + \mathrm{d}, \ldots \mathrm{a} + (\mathrm{q} - 1)\mathrm{d}\}$, with edge weight of xy is $\mathrm{w(xy)} = \lambda(\mathrm{x}) + \lambda(\mathrm{y}) + \lambda(\mathrm{xy})$. A (a, d)-edge anti magic total labeling, is called if $\lambda(\mathrm{V}) = \{1,2, \ldots \mathrm{p}\}$. In this research, we will construct (a, d)-super edge anti magic total labeling on t-copy graph of wheel connected $\mathrm{W}_{\mathrm{t,n}}$, with even $\mathrm{n} \geq 4$, $\mathrm{t} \geq 2$ have $\big((2\mathrm{n} + 2)\mathrm{t} + 2, 1\big)$-super edge anti magic total labeling and its application.
Keywords: *Graph Wheel Connected, Graph Labeling, (a, d)-Edge Anti Magic Total Labeling, (a, d)-Super Edge Anti Magic Total Labeling.*

Abstrak: Sebuah Graf $G\ (p, q)$ dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$, dan fungsi satu-satu pada $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots p + q\}$, dengan $W = \{w(xy) | xy \in E(G)$, dan $x, y \in V(G)\} = \{a, a + d, \ldots a + (q - 1)d\}$, dengan bobot sisi xy adalah $w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(xy)$. Sebuah pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib, dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super jika $\lambda(V) = \{1,2, \ldots p\}$. Pada skripsi ini, akan mengkonstruksi pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super pada *t-copy* graf roda terhubung $W_{t,n}$ dengan $n \geq 4$ genap, $t \geq 2$ memiliki pelabelan total $((2n + 2)t + 2, 1)$-sisi-anti ajaib super dan aplikasinya.
Kata kunci: *Graf Roda Terhubung, Pelabelan Graf, Pelabelan Total (a, d)-Sisi-Anti Ajaib, Pelabelan Total (a, d)-Sisi-Anti Ajaib Super.*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan pokok bahasan yang memiliki banyak terapan.Graf digunakan untuk merepresentasikan obyek-obyek diskrit dan hubungannya dengan obyek-obyek tersebut. Dalam graf, obyek-obyek dapat direpresenatasikan sebagai titik, sedangkan hubungan antara obyek-obyek tersebut direpresentasikan sebagai garis atau sisi.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček (1964), kemudian Stewart (1966), serta Kotzig dan Rosa (1970). Secara umum, pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label.

Di era teknologi saat ini telah memberikan kemudahan dalam penyampaian suatu informasi. Pada umumnya, untuk menyampaikan suatu informasi dapat melalui surat atau berkomunikasi melalui telepon. Saat ini, seiring kemajuan teknologi informasi maka proses pengiriman informasi berupa tukar menukar informasi dapat dilakukan melalui *File Transfer Protocol* (FTP).

Kriptografi merupakan salah satu teknik dalam upaya mempertahankan kerahasiaan informasi yang akan dikirimkan dengan melakukan penyandian informasi terlebih dahulu menjadi kode yang tidak terbaca. Dengan demikian, bila ada pihak ketiga yang mencuri informasi tersebut akan kesulitan dalam menterjemahkan isi dari informasi yang sebenarnya karena yang diperoleh adalah informasi yang tidak terbaca. Salah satu teknik kriptografi klasik ialah sandi *Affine,* dimana sandi *Affine* merupakan perluasan dari sandi *Caesar*. Penyandian digunakan dalam proses enkripsi dan dekpripsi suatu pesan. Isi dari pesan yang akan dienkripsi maupun dekripsi akan diubah menjadi berbeda pada masing-masing karakternya sehingga tidak dapat dibaca oleh pihak-pihak yang tidak berhak atas pesan tersebut.

Proses penyandian dalam pengaman kerahasiaan informasi yang akan dikirimkan dapat dilakukan dengan memodifikasi sandi *Affine* menggunakan struktur pelabelan pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super pada t-*copy* graf roda terhubung. Pada jurnal ini akan ditunjukkan bahwa graf roda terhubung $W_{t,n}$ memiliki pelabelan total $((2n + 2)t + 2, 1)$-sisi-anti ajaib super pada t-*copy* graf roda terhubung untuk $n \geq 4$, dan $t \geq 2$, dimana n genap. Serta aplikasi yang menggunakan struktur pelabelan tersebut.

LANDASAN TEORI

Graf $G = (V, E)$, terdiri dari pasangan himpunan tak kosong dari titik-titik yang dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi yang mungkin kosong yang dinotasikan dengan $E(G)$ [5]. Dalam kehidupan nyata, titik dapat diilustrasikan sebagi kota, orang, atau benda diskrit lainnya. Sedangkan sisi dapat diilustrasikan sebagai jalan, jalur, dan sebagainya. Pengaitan titik-titik tersebut dapat membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu.

Graf roda W_n, adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik pada graf lingkaranC_n ke satu titik yang disebut titik pusat v_0. $W_n$terdiri dari $n + 1$ titik, misalkan $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $2n$ sisi, misalkan $v_0 v_i$, $1 \leq i \leq n$, $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$, dan $v_n v_1$ dengan $3 \leq n \in \mathbb{N}$ [4].

Misalkan W_n graf roda dengan $n + 1$ titik, dimana v_0 sebagai pusat, dan lingkaran $v_1 v_2 v_{3 \dots} v_n v_1$ sebagai *rim* atau pelek (pinggiran). Untuk t-*copy* pada graf roda W_n dinotasikan oleh $W_{t.n}$, yaitu sebuah graf yang diperoleh dari mengambil t-*copy* dari W_n dan menggabungkan setiap pusat graf roda oleh sisi yang menghubungkan sebuah *path* P_t [6].

Misalkan sebuah graf G memiliki p titik dan q sisi dinotasikan dengan graf (p, q). Sebuah graf $G\ (p, q)$ dikatakan pelabelan total (a, d)–sisi–anti ajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$, dan sebuah fungsi satu-satu pada $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, p + q\}$ dengan himpunan bobot sisinya adalah

$$W = \{w(xy) = \lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(xy) | x, y \in V(G) \text{ dan } xy \in E(G)\} \quad (1)$$
$$= \{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\} \text{ [6].} \quad (2)$$

W himpunan dari bobot-bobot sisi pada graf G [11]. Pelabelan λ pelabelan total (a, d)–sisi–anti ajaib adalah *super* jika $\lambda(V) = \{1,2, \dots, p\}$, atau dapat disebut sebagai pelabelan total (a, d)–sisi–anti ajaib super [6].

Lemma 1. Jika sebuah graf $\mathrm{G}\ (\mathrm{p}, \mathrm{q})$memiliki pelabelan total (a, d)–sisi–anti ajaib super maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$.

Bukti:
Asumsikan graf $G\ (p, q)$ memiliki pelabelan total (a, d)–sisi–anti ajaib super $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \dots, p + q\}$. Kemungkinan minimum bobot sisinya adalah $1 + 2 + p + 1 = p + 4$, ini menyatakan bahwa $a \geq p + 4$. Sedangkan kemungkinan maksimum bobot sisinya adalah$p + (p - 1) + (p + q) = 3p + q - 1$. Sehingga, $a + (q - 1)d \leq 3p + q - 1$. Oleh karena itu kita punya $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ [3]. ■

Lemma 2. Jika sebuah graf $\mathrm{G}\ (\mathrm{p}, \mathrm{q})$ memiliki pelabelan total (a, d)–sisi–anti ajaib maka $d \leq \frac{3p+3q-9}{q-1}$..
Bukti:
Asumsikan graf $G\ (p, q)$ memiliki pelabelan *total* (a, d)*–sisi–anti ajaib* $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \dots, p + q\}$. Kemungkinan minimum bobot sisinya adalah $1 + 2 + 3 = 6$, ini menyatakan bahwa $a \geq 6$. Sedangkan kemungkinan maksimum bobot sisinya adalah $(p + q - 2) + (p + q - 1) + (p + q) = 3p + 3q - 3$. Sehingga, $a + (q - 1)d \leq 3p + 3q - 3$. Oleh karena itu kita punya $d \leq \frac{3p+3q-9}{q-1}$ [2]. ■

Kriptografi merupakan salah satu teknik dalam upaya mempertahankan kerahasiaan informasi yang akan dikirimkan dengan melakukan penyandian informasi terlebih dahulu menjadi kode atau sandi yang tidak terbaca. Dengan demikian, bila ada pihak ketiga yang mencuri informasi tersebut akan [7]. Algoritma kriptografi merupakan langkah-langkah logis bagaimana menyembunyikan pesan dari orang-orang yang tidak berhak atas pesan tersebut. Algoritma kriptografi terdiri dari tiga fungsi dasar, yaitu Enkripsi, Dekripsi dan Kunci. [1]

Sandi *Affine* merupakan salah satu teknik kriptografi klasik, dan merupakan perluasan dari sandi geser (*Caesar*) namun kuncinya sangat mudah diselesaikan dengan menggunakan frekwensi. Sandi *Affine* merupakan sandi yang bekerja secara substitusi. Pada sandi *Affine* terdapat karakter (huruf, angka dan notasi lainnya) sebanyaknya m positif dan karakter tersebut diasosiasikan dalam angka dengan rentang $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$.

Adapun formula enkripsi sandi *Affine* berupa [1]:

$$E(x) \equiv (ax + b) mod\ m$$

Kemudian deskripsinya menggunakan formula berikut [1]:

$$D(x) \equiv a^{-1}(x - b) mod\ m,$$

dimana b sebarang konstanta yang diambil dalam rentang $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, demikian juga untuk konstanta a namun dengan tambahan sifat relative prima terhadap m sehingga dijamin a memiliki *invers*, dengan notasi a^{-1}.

FTP adalah suatu *protocol* yang berfungsi untuk tukar-menukar informasi dalam suatu jaringan (*network*) yang mendukung *Transmission Control Protocol* (TCP), biasa disebut juga dengan IP *protocol*. Dua hal yang sangat penting dalam FTP adalah FTP *server* dan FTP *Client*. FTP *server* menjalankan *software* yang digunakan untuk tukar menukar informasi (data) yang selalu siap memberikan layanan FTP apabila mendapat permintaan dari FTP *client*. FTP *client* adalah komputer yang meminta koneksi ke s*erver* FTP untuk tujuan tukar menukar data (mengunduh atau mengunggah data). Pengiriman data melalui *server* FTP sebenarnya cara yang tidak aman karena informasi tersebut disalurkan tanpa melalui proses enkripsi terlebih dahulu tetapi dalam bentuk informasi yang jelas (data sebenarnya). Oleh karena pengirimannya tanpa proses enkripsi maka *username*, *password*, data atau informasi yang ditransfer maupun perintah yang dikirim dapat di *sniffing* (disadap) dengan menggunakan *Protocol Analyzer* (*Sniffer* atau penyadap) sehingga informasi penting/rahasia tersebut akan mudah diketahui [7].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Konstruksi Penamaan Unsur-Unsur pada Graf Roda Terhubung

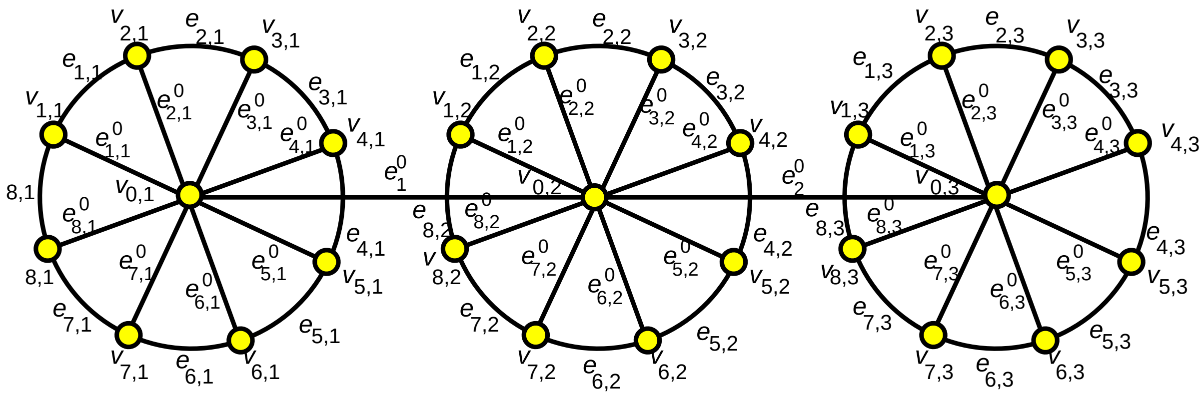
Mengkonstruksi penamaan unsur-unsurpada suatu graf yaitu memberikan nama pada masing-masing titik dan sisi yang ada pada graf tersebut. Berikut adalah konstruksi penamaan unsur-unsur pada graf roda terhubung $W_{t.n}$.

Pada konstruksi graf $W_{t,n}$ ini, kita definisikan bahwa $V(W_{t,n}) = \{v_{i,j} | 1 \leq j \leq t,$ $0 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_{t,n}) = \{e_{i,j}, e_{n,j}, e^0_{i,j}, e^0_j\}$, dimana

$$e_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j}v_{i+1,j}, & 1 \leq i \leq n-1, \ 1 \leq j \leq t; \\ v_{n,j}v_{1,j}, & i = n, \ 1 \leq j \leq t, \end{cases}$$

$$e^0_{i,j} = v_{0,j}v_{i,j}, \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq t,$$

$$e^0_j = v_{0,j}v_{0,j+1}, \ 1 \leq j \leq t-1.$$



Gambar 1. Konstruksi Penamaan Unsur-Unsur Graf $\boldsymbol{W_{3,8}}$

Konstruksi Pelabelan pada Graf Roda Terhubung

Pada skripsi kali ini, akan diteliti bagaimana mengkonstruksi pelabelan total $((2n+2)t+2, 1)$-sisi-anti ajaib super pada graf $W_{t,n}$, untuk $n \geq 4$ dimana n bilangan genap, dan $t \geq 2$, untuk setiap n dan t bilangan bulat.

Pada pelabelan pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super,pada graf yang akan diteliti pada skripsi ini, mengikuti beberapa teorema. Diberikan sebarang pelabelan λ total (a, d)-sisi-anti ajaib pada graf (p, q). Maka pelabelan dual λ' dapat didefinisikan sebagai

$$\lambda'(x) = p + q + 1 - \lambda(x), \forall x \in V(G), \text{ dan}$$
$$\lambda'(xy) = p + q + 1 - \lambda(xy), \forall\ xy \in E(G), \text{ dan } x, y \in V(G).$$

Berdasarkan *duality* tersebut, beberapa teorema telah ditetapkan [6]:

Teorema 1
Jika sebuah graf $G\,(p, q)$ memiliki sebuah pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib, maka graf G memiliki pelabelan total (a', d)-sisi-anti ajaib sebagai dual pelabelannya dengan [6]

$$a' = 3p + 3q + 3 - a - (q - 1)d.$$

Teorema 2
Jika λ sebuah pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super pada sebuah graf $G\,(p, q)$, maka pelabelan λ' didefinisikan sebagai:

$$\lambda'(x) = p + 1 - \lambda(x), \forall\, x \in V(G)\ , \text{ dan}$$
$$\lambda'(xy) = 2p + q + 1 - \lambda(xy), \forall\, xy \in E(G), \text{ dan } x,y \in V(G),$$

adalah sebuah pelabelan total (a', d)-sisi-anti ajaib super pada G dengan [6]

$$a' = 4p + q + 3 - a - (q - 1)d.$$

Teorema 3
Jika graf roda terhubung $W_{t,n}$ memilikin ≥ 4 dan $t \geq 2$, dengan t bilangan bulat dan n genap, maka graf $W_{t,n}$ memiliki sebuah pelabelan total $\big((2n + 2)t + 2, 1\big)$-sisi-anti ajaib super. Pada pelabelan ini memiliki selfdual pelabelan [6].

Bukti:
Didefinisikan pelabelan λ sebagai berikut:

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} (i-1)t + j, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, \quad 1 \leq j \leq t; \\ \frac{nt}{2} + j, & i = 0, \quad 1 \leq j \leq t; \\ it + j, & \frac{(n+2)}{2} \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq t, \end{cases} \tag{1}$$

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} (2n + 2 - i)t + 1 - j, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, \quad 1 \leq j \leq t; \\ (2n + 1 - i)t + 1 - j, & \frac{(n+2)}{2} \leq i \leq n - 1, \quad 1 \leq j \leq t; \\ \left(\frac{3n+2}{2}\right)t + 1 - j, & i = n, \quad 1 \leq j \leq t, \end{cases} \tag{2}$$

$$\lambda(e_{i,j}^0) = \begin{cases} (3n + 3 - 2i)t + 1 - j, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, \quad 1 \leq j \leq t; \\ (4n + 2 - 2i)t + 1 - j, & \frac{(n+2)}{2} \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq t, \end{cases} \tag{3}$$

$$\lambda(e_j^0) = (3n + 2)t - j, \quad 1 \leq j \leq t - 1 \tag{4}$$

Misalkan $W_{(t,n)}$ adalah graf roda terhubung dengan t-*copy*, dan n genap. Dimana $\left|V\big(W_{(t,n)}\big)\right| = (n + 1)t$, dan $\left|E\big(W_{(t,n)}\big)\right| = (2n + 1)t - 1$. Karena pelabelan λ merupakan pelabelan total, maka himpunan label totalnya adalah

$$\{1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,2n,2n+1,\ldots,(n+1)t,\ldots,(2n+1)t-1,\ldots,(3n+2)t-1\}.$$

a. Akan ditunjukkan λ adalah pemetaan satu-satu pada dan pelabelan super.
Berdasarkan persamaan (1) sampai (4) dan masing-masing kasus i dan j, diperoleh:

$$\{\lambda(v_{i,j})\} = \Big\{1,2,\ldots,t,t+1,t+2,\ldots,2t,\ldots,\left(\frac{n-2}{2}\right)t+1,\left(\frac{n-2}{2}\right)t+2,\ldots\frac{n}{2}t,$$
$$\ldots,\frac{n}{2}t+1,\frac{n}{2}t+2,\ldots,\left(\frac{n+2}{2}\right)t,\left(\frac{n+2}{2}\right)t+1,\left(\frac{n+2}{2}\right)t+2,\ldots$$
$$\ldots,\left(\frac{n+4}{2}\right)t,\ldots,nt+1,nt+2,\ldots,(n+1)t\Big\}.$$

Sehingga terbukti bahwa λ adalah pelabelan super.

$$\{\lambda(e_{i,j})\} = \Big\{(n+1)t+1,\ldots,(n+2)t-1,(n+2)t,\ldots,\left(\frac{3n-2}{2}\right)t+1,\ldots$$
$$\ldots,\left(\frac{3n}{2}\right)t-1,\left(\frac{3n}{2}\right)t,\left(\frac{3n}{2}\right)t+1,\ldots,\left(\frac{3n+2}{2}\right)t-1,\left(\frac{3n+2}{2}\right)t,$$
$$\left(\frac{3n+2}{2}\right)t+1,\ldots,\left(\frac{3n+4}{2}\right)t-1,\left(\frac{3n+4}{2}\right)t,\ldots,(2n-1)t+1,\ldots$$
$$\ldots,2nt-1,2nt,2nt+1,\ldots,(2n+1)t-1,(2n+1)t\}$$
$$\{\lambda(e^0_{i,j})\} = \{(2n+1)t+1,\ldots,(2n+2)t-1,(2n+2)t,(2n+2)t+1,\ldots$$
$$\ldots,(2n+3)t-1,(2n+3)t,\ldots,(3n-2)t+1,\ldots,(3n-1)t-1,$$
$$(3n-1)t,\ldots,(3n-1)t+1,\ldots,3nt-1,3nt\}$$
$$\{\lambda(e^0_j)\} = \{(3n+1)t+1,\ldots,(3n+2)t-2,(3n+2)t-1\}.$$

Sehingga terbukti bahwa λ adalah pemetaan satu-satu pada.

b. Misalkan W merupakan bobot total sisi dari graf $W_{(t,n)}$, maka untuk mengkostruksi himpunan dari bobot total sisi W berdasarkan:

$$W = \{w(e_{i,j}), w(e^0_{i,j}), w(e^0_j)\},$$

dimana

$$w(e_{i,j}) = \begin{cases} \lambda(v_{i,j}) + \lambda(e_{i,j}) + \lambda(v_{i+1,j}), & 1 \le i \le n-1, \quad 1 \le j \le \\ \lambda(v_{n,j}) + \lambda(e_{n,j}) + \lambda(v_{1,j}), & i = n, \quad 1 \le j \le t, \end{cases} \tag{5}$$

$$w(e^0_{i,j}) = \lambda(v_{0,j}) + \lambda(e^0_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}), \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le t \tag{6}$$

$$w(e^0_j) = \lambda(v_{0,j}) + \lambda(e^0_j) + \lambda(v_{0,j+1}), \quad 1 \le j \le t-1 \tag{7}$$

Akan ditunjukkan pelabelan W merupakan bobot total sisi – anti ajaib, dengan $a = (2n+2)t+2$ dan $d = 1$.

Berdasarkan persamaan (5) sampai (7) dan masing-masing kasus i dan j, diperoleh:

$$w(e_{i,j}) = \begin{cases} (2n+1+i)t+1+j, & 1 \le i \le \frac{n}{2}-1, \quad 1 \le j \le t; \\ \left(\frac{5n+4}{2}\right)t+1+j, & i = \frac{n}{2}, \quad 1 \le j \le t; \\ (2n+2+i)t+1+j, & \frac{(n+2)}{2} \le i \le n-1, \quad 1 \le j \le t; \\ \left(\frac{5n+2}{2}\right)t+1+j, & i = n, \quad 1 \le j \le t, \end{cases}$$

$$w(e_{i,j}^{0}) = \begin{cases} \left(\frac{7n+4}{2} - i\right)t + 1 + j, & 1 \le i \le \frac{n}{2},\ 1 \le j \le t; \\ \left(\frac{9n+4}{2} - i\right)t + 1 + j, & \left(\frac{(n+2)}{2}\right) \le i \le n, \quad 1 \le j \le t, \end{cases}$$

$w(e_j^0) = (4n+2)t + 1 + j,\ 1 \le j \le t-1$

Sehingga kita mempunyai himpunan dari bobot-bobot sisi sebagai berikut:

$$W = \{(2n+2)t+2, (2n+2)t+3, \ldots, (4n+3)t-1, (4n+3)t\}$$

Dari uraian di atas, terbukti bahwa pelabelan W merupakan bobot total sisi antiajaib, dengan $a = (2n+2)t+2$ dan $d = 1$.

c. Akan ditunjukkan pelabelan λ memiliki *selfdual* pelabelan.
Definisikan λ' sesuai dengan Teorema 2. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh λ' sebuah pelabelan total (a', d)-sisi-anti ajaib super pada G dengan

$$a' = 4p + q + 3 - a - (q-1)d$$

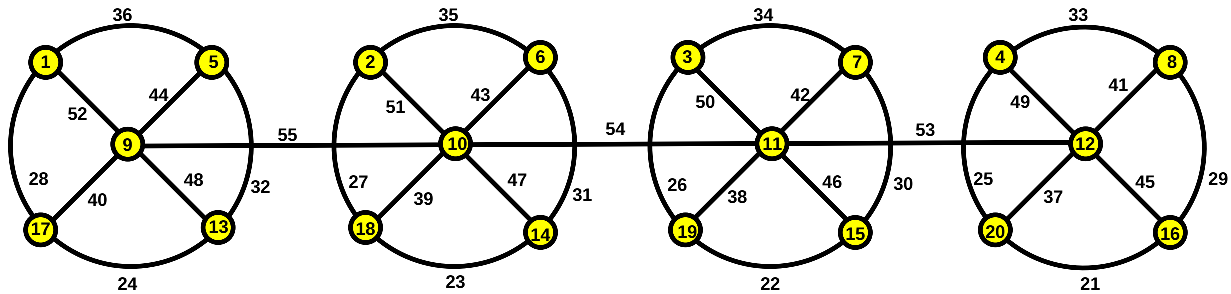
akan ditunjukkan $a' = a$.
Perhatikan:
$a = (2n+2)t + 2$
$= 2(n+1)t + 2$
$= 2p + 2$
Substitusi persamaan a dan d ke persamaan a', perhatikan:
$a' = 4p + q + 3 - a - (q-1)d$
$= 4p + q + 3 - (2p+2) - (q-1).(1)$
$= 4p + q + 3 - 2p - 2 - q + 1$

$$= 2p + 2 = a$$

Akibatnya, $a' = a$. Sehingga terbukti pelabelan λ memiliki *selfdual* pelabelan.

Berdasarkan a hingga c, Teorema 3 yang menyatakan bahwa jika graf roda terhubung $W_{t,n}$ memiliki $n \ge 4$ dan $t \ge 2$, dengan t bilangan bulat dan n genap, maka graf $W_{t,n}$ memiliki sebuah pelabelan total $\left((2n+2)t+2, 1\right)$-sisi-anti ajaib super. Pelabelan ini memiliki *selfdual* pelabelan, terbukti. ■

Berikut adalah contoh gambar pada pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib super.



Gambar 2. Pelabelan Total $(42, 1)$-Sisi-Anti Ajaib Super Graf$W_{4,4}$

Modifikasi Sandi Affine

Sandi *Affine* dapat dimodifikasi pada konstanta b, variasi b dapat diambil dari struktur label titik dan sisi dari pelabelan total (a,d)-sisi-anti ajaib super pada lintasan yang menghubungkan semua titik pusat roda dalam graf $W_{t,n}$. Dengan demikian, formula enkripsi dalam sandi *Affine* menjadi

$$y_i = E(x_i) \equiv \big(ax_i + \lambda(v \cup e)\big) mod\ m.$$

Sedangkan formula dekripsinya menjadi

$$x_i = D(y_i) \equiv a^{-1}\big(y_i - \lambda(v \cup e)\big) mod\ m,$$

dimana

y_i : karakter hasil enkripsi dari x_i

x_i : karakter yang akan dienkripsi

$\lambda(v \cup e)$: struktur label titik dan sisi pada lintasan graf $W_{t,n}$

m : bilangan bulat, biasanya banyaknya kode yang digunakan (pada penelitian ini menggunakan 27 karakter dan 95 karakter)

a^{-1} : *invers* perkalian dari a dalam modulus m.

Selanjutnya, hasil modifikasi ini disebut Sitem Kriptografi Pelabelan Graf Anti Ajaib (SK-PGA) [7]. Algoritma SK-PGA dijamin oleh teorema:

Teorema 4

Misalkan P dan C masing-masing menotasikan plaintext dan ciphertext dengan panjang t dimana karakter decimal $x \in$ Pdan $y \in C$. Misalkan λ adalah himpunan sebarang struktur pelabelan total $((2n+2)t+2,1)$-sisi-anti ajaib super untuk graf $W_{t,n}$ dengan sebarang bilangan asli $n \geq 4$ genap dan $|\lambda| = t$. Misalkan $m \geq t$,a adalah bilangan asli sebarang, $\lambda_1 \in \lambda$ dan $y \equiv (ax + \lambda_1) \mathrm{mod}\ m$. Jika a relatif prima dengan m, maka $x \equiv a^{-1}(y - \lambda_1) \mathrm{mod}\ m$ [7].

Bukti:

$y \equiv (ax + \lambda_1) mod\ m \Leftrightarrow m|(y - (ax + \lambda_1))$, artinya $m$membagi $(y - (ax + \lambda_1))$. Dengan demikian, terdapat bilangan asli l sedemikian sehingga $y - (ax + \lambda_1) = lm$. Selanjutnya diperoleh $ax = y - \lambda_1 - lm$. Karena a relatif prima dengan m maka terdapat a^{-1} sedemikian sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a\ mod\ m \equiv 1\ mod\ m$. Oleh karena itu, $x - a^{-1}(y - \lambda_1) = a^{-1}lm$. Dengan mengambil $n_1 = a^{-1}l$ diperoleh ekstensi bilangan asli n_1 untuk dapat menyatakan m membagi $x - a^{-1}(y - \lambda_1)$. Dengan demikian, $x \equiv a^{-1}(y - \lambda_1) mod\ m$.

■

Contoh Proses Kerja SK-PGA

Misalkan suatu pesan berisi kata HELP ME akan dienkripsi menggunakan SK-PGA. Pertama, menghitung panjang kata atau banyaknya karakter yang akan dienkripsi. Karena “HELP ME” memiliki 7 karakter (termasuk karakter “spasi”), maka banyaknya roda dalam struktur pelabelan yang dibuat sebanyak 4 rangkap. Seperti pada Gambar 2. karena banyaknya titik-titik lingkaran roda, n, dapat mengambil bilangan asli genap sebarang, dalam contoh ini mengambil $n = 4$. Banyaknya *copy* graf roda yang digunakan menyesuaikan dengan panjang karakter yang akan dienkripsi. Dalam kasus ini dibentuk graf $W_{4,4}$ dan pelabelannya seperti pada Gambar 2. menggunakan persamaan (1) sampai dengan (4), yang masing-masing label titik dan sisi dari lintasan graf $W_{4,4}$ tersebut mewakili nilai $\lambda(v \cup e)$ pada setiap karakter pada kata HELP ME yang akan dienkripsi.

Pada proses enkripsi untuk kata HELP ME menjadi *chipertext* adalah pertama dengan memisalkan {spasi=0, A=1, B=2, …, Z=26}, artinya kita punya permisalan H=8, E=5, L=12, P=16, spasi=0, dan M=13. Selanjutnya dipilih nilai $a = 2$ yang relative prima dengan m, dimana $m = 27$ (banyaknya karakter termasuk spasi adalah 27). Sehingga *invers* dari $a = 2$ adalah $a^{-1} = 14$. Selanjutnya, dari Gambar 2. diambil label titik dan sisi dari graf $W_{4,4}$, yaitu

$\lambda(v_{0,1}) = 9$; $\lambda(v_{0,2}) = 10$; $\lambda(v_{0,3}) = 11$; $\lambda(v_{0,4}) = 12$; $\lambda(e_1^0) = 55$; $\lambda(e_2^0) = 54$; $\lambda(e_3^0) = 53$.

Pada proses enkripsi menggunakan 95 karakter yang diambil dari refrensi kode ASCII menggunakan karakter seperti pada tabel berikut:

Tabel 1. Sembilan Puluh Lima Karakter (Refrensi Kode ASCII)

Nilai	Dec ASCII	Glph	Nilai	Dec ASCII	Glph	Nilai	Dec ASCII	Glph	Nilai	Dec ASCII	Glph
0	32		25	57	**9**	50	82	**R**	75	107	**k**
1	33	**!**	26	58	**:**	51	83	**S**	76	108	**l**
2	34	**"**	27	59	**;**	52	84	**T**	77	109	**m**
3	35	**#**	28	60	**<**	53	85	**U**	78	110	**n**
4	36	**$**	29	61	**=**	54	86	**V**	79	111	**o**
5	37	**%**	30	62	**>**	55	87	**W**	80	112	**p**
6	38	**&**	31	63	**?**	56	88	**X**	81	113	**q**
7	39	**'**	32	64	**@**	57	89	**Y**	82	114	**r**
8	40	**(**	33	65	**A**	58	90	**Z**	83	115	**s**
9	41	**)**	34	66	**B**	59	91	**[**	84	116	**t**
10	42	*****	35	67	**C**	60	92	****	85	117	**u**
11	43	**+**	36	68	**D**	61	93	**]**	86	118	**v**
12	44	**,**	37	69	**E**	62	94	**^**	87	119	**w**
13	45	**-**	38	70	**F**	63	95	**_**	88	120	**x**
14	46	**.**	39	71	**G**	64	96	**`**	89	121	**y**
15	47	**/**	40	72	**H**	65	97	**a**	90	122	**z**
16	48	**0**	41	73	**I**	66	98	**b**	91	123	**{**
17	49	**1**	42	74	**J**	67	99	**c**	92	124	**|**
18	50	**2**	43	75	**K**	68	100	**d**	93	125	**}**
19	51	**3**	44	76	**L**	69	101	**e**	94	126	**~**
20	52	**4**	45	77	**M**	70	102	**f**			
21	53	**5**	46	78	**N**	71	103	**g**			
22	54	**6**	47	79	**O**	72	104	**h**			
23	55	**7**	48	80	**P**	73	105	**i**			
24	56	**8**	49	81	**Q**	74	106	**j**			

Untuk enkripsi, gunakan persamaan $y_i = E(x_i) \equiv \left(ax_i + \lambda(v \cup e)\right) mod\ m$ sehingga dengan menggunakan 27 karakter diperoleh:

$$
\begin{aligned}
y_1 = E(H) &\equiv \left(2.8 + \lambda(v_{0,1})\right) mod\ 27 \\
&\equiv (16 + 9) mod\ 27 \\
&\equiv 25\ mod\ 27 \\
&\equiv 25 = Y. \\
y_2 = E(E) &\equiv \left(2.5 + \lambda(e_1^0)\right) mod\ 27 \\
&\equiv (10 + 55) mod\ 27
\end{aligned}
$$

$\equiv 65\ mod\ 27$
$\equiv 11 = K.$
$y_3 = E(L) \equiv \left(2.12 + \lambda(v_{0,2})\right) mod\ 27$
$\equiv (24 + 10) mod\ 27$
$\equiv 34\ mod\ 27$
$\equiv 7 = G.$

Proses di atas diteruskan untuk semua huruf lainnya sehingga *plaintext* **HELP ME** berubah dmenjadi *ciphertext* **YKGEKYV**.

Selanjutnya, untuk proses dekripsi *ciphertxt* YKGEKYV menjadi *plaintext* menggunakan persamaan $x_i = D(y_i) \equiv a^{-1}(y_i - \lambda(v \cup e)) mod\ m$, sehingga diperoleh:

$x_1 = D(Y) \equiv a^{-1}\left(25 - \lambda(v_{0,1})\right) mod\ 27$
$\equiv 14(25 - 9) mod\ 27$
$\equiv 224\ mod\ 27$
$\equiv 8 = H.$
$x_2 = D(K) \equiv a^{-1}(11 - \lambda(e_1^0)) mod\ 27$
$\equiv 14(11 - 55) mod\ 27$
$\equiv -616\ mod\ 27$
$\equiv 5 = E.$
$x_3 = D(G) \equiv a^{-1}\left(7 - \lambda(v_{0,2})\right) mod\ 27$
$\equiv 14(7 - 10) mod\ 27$
$\equiv -42\ mod\ 27$
$\equiv 12 = L.$

Proses di atas diteruskan untuk semua huruf lainnya sehingga *ciphertext* **YKGEKYV** berubah kembali menjadi *plaintext* **HELP ME**.

Dengan proses enkripsi yang serupa, tetapi menggunakan 95 karakter, *plaintext* **HELP ME** berubah menjadi *ciphertext* **yB#W+Pv**. Begitu pula untuk proses dekripsi menggunakan 95 karakter, *ciphertext* **yB#W+Pv** berubah kembali menjadi *plaintext* **HELP ME**.

Algoritma SK-PGA

a. Algoritma Enkripsi SK-PGA

Proses enkripsi sangat penting dalam membangun perangkat lunak ini. Mesin utama penyadian ini terdapat pada proses enkripsi ini. Berikut algoritma proses enkripsi:

1. Mulai
2. Hitung banyak karakter atau panjang teks pada *plaintext* dalam suatu *file* atau pesan yang akan dienkripsi, misalkan $x = x_1 x_{2 \dots} x_t$.
3. Pilih $n \geq 4$ bilangan asli genap sebarang.
4. Konstruksi graf $W_{t,n}$ yang bersesuaian dengan panjang teks atau pesan. Apabila genap, maka konstruksi graf $W_{\frac{t+2}{2},n}$. Jika ganjil, konstruksi graf $W_{\frac{t+1}{2},n}$.
5. Buat label titik dan sisi pada lintasan dalam graf $W_{t,n}$ menggunakan persamaan $\lambda(v_{i,j}) = \frac{nt}{2} + j,\ \ i = 0,\ \ 1 \leq j \leq \frac{t+2}{2}$ dan $\lambda(e_j^0) = (3n+2)t - j,\ 1 \leq j \leq \frac{t+2}{2} - 1$, untuk t genap. $\lambda(v_{i,j}) = \frac{nt}{2} + j,\ \ i = 0,\ \ 1 \leq j \leq \frac{t+1}{2}$ dan $\lambda(e_j^0) = (3n+2)t - j,\ 1 \leq j \leq \frac{t+1}{2} - 1$, untuk t ganjil.

6. Ubah *plaintext* sesuai dengan 27 karakter atau decimal ASCII dalam 95 karakter.
7. Enkripsikan secara berurutan setiap karakter dalam *plaintext* menggunakan rumus $y_i = E(x_i) \equiv \big(ax_i + \lambda(v \cup e)\big) mod\ m$
8. Tulis hasil enkripsi dalam karakter berupa *ciphertext*, yaitu $y = y_1 y_{2\ldots} y_t$.
9. Selesai.

b. Algoritma Dekripsi SK-PGA

Proses ini adalah komponen mengembalikan *plaintext* menjadi *ciphertext* yang dapat dipahami penerimaan pesan. Proses dekripsi ini dinamakan juga penguraian kembali teks menjadi teks asal sebelum disandikan. Berikut adalah algoritma proses dekripsi:

1. Mulai
2. Hitung banyak karakter atau panjang teks pada *ciphertext* dalam suatu *file* atau terenkripsi, misalkan $y = y_1 y_{2\ldots} y_t$.
3. Pilih $n \geq 4$ bilangan asli genap sebarang yang sesuai dengan proses enkripsi.
4. Konstruksi graf $W_{t,n}$ yang bersesuaian dengan panjang teks atau pesan. Apabila genap, maka konstruksi graf $W_{\frac{t+2}{2},n}$. Jika ganjil, konstruksi graf $W_{\frac{t+1}{2},n}$.
5. Buat label titik dan sisi pada lintasan dalam graf $W_{t,n}$ menggunakan persamaan $\lambda\big(v_{i,j}\big) = \frac{nt}{2} + j,\quad i = 0,\quad 1 \leq j \leq \frac{t+2}{2}$ dan $\lambda\big(e_j^0\big) = (3n+2)t - j,\ 1 \leq j \leq \frac{t+2}{2} - 1$, untuk t genap. $\lambda\big(v_{i,j}\big) = \frac{nt}{2} + j,\quad i = 0,\quad 1 \leq j \leq \frac{t+1}{2}$ dan $\lambda\big(e_j^0\big) = (3n+2)t - j,\ 1 \leq j \leq \frac{t+1}{2} - 1$, untuk t ganjil.
6. Hitung hasil dekripsi menggunakan rumus $x_i = D(y_i) \equiv a^{-1}\big(y_i - \lambda(v \cup e)\big) mod\ m$, dan tulis hasil hitungan dalam 27 karakter atau decimal ASCII dalam 95 karakter yang besesuaian.
7. Ubah karakter ASCII atau karakter yang diperoleh pada langkah 5 menjadi karakter biasa, yaitu *plaintext* $x = x_1 x_{2\ldots} x_t$.
8. Selesai.

c. Algoritma FTP SK-PGA

Berikut adalah algoritma FTP SK-PGA:

1. Mulai.
2. Buat proses koneksi (*login*) antara FTP *server* dan *client.*
3. Buat proses enkripsi *file* pada FTP *client* dan unggah (*upload*) *file* pada *directory* yang akan dibagi (*sharing*).
4. Buat proses unduh (*download*) *file* yang diinginkan oleh *client* dan *directory server.*
5. Buat proses dekripsi *file* oleh *client.*
6. Selesai.

Program Pengamanan FTP menggunakan SK-PGA

Algoritma SK-PGA diimplementasikan dalam aplikasi atau program *(software)* untuk mengamankan data dalam proses *transfer* melalui FTP *server*. Program ini menggunakan kode 27 karakter dan refrensi sebagian kode ASCII dalam 8-*bit*, yaitu 95 karakter dan bahasa pemrograman *Java* J2SE. Kerja program ini masih terbatas pada *file* berekstensi *txt.*

Konektivitas

Pada proses awal, program akan meminta proses konektivitas antara *client* dan *server.* Pada langkah awal ini, FTP *server* dijalankan menggunakan *username, password*, dan *file* direktori pada *server* yang akan diaktifkan dan digunakan untuk berhubungan dengan *server* dan *client*. Proses enkripsi dijalankan dengan mengambil *file* (sebagai *plaintext*) yang berekstensi *txt*. Setelah terbuka oleh aplikasi, selanjutnya dilakukan proses enkripsi *file*. *File-file* yang telah dienkripsi sudah *automatic* disimpan. Pada proses enkripsi ini dilakukan oleh *client* sekaligus meng-*upload* ke *folder* untuk dibagikan agar dapat di-*download* kembali oleh *client*. Pada proses dekripsi, semua data terenkripsi yang sudah di-*download* dapat diperbaiki langsung oleh *client*. Maka *file* tersebut akan dikembalikan ke *file* semula atau *plaintext* (terbaca). Setelah itu, *file* yang sudah diperbaiki tersebut juga sudah *automatic* disimpan kembali dalam computer *client* maupun *server*.

KESIMPULAN

Hasil penelitian pada skripsi ini adalah graf roda terhubung $W_{t,n}$untuk$n \geq 4$dan $t \geq 2$, dengan t bilangan bulat dan n genap, memiliki sebuah pelabelan total$\big((2n+2)t+2, 1\big)$-sisi-anti ajaib super, denganbarisan bobot yang dimuat dengan$a = (2n+2)t+2$, dan $d = 1$, dan merupakan pelabelan *selfdual*. Struktur pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super pada$t$-*copy* graf roda terhubung digunakan dalam memodifikasi sandi *Affine*,dengan rumusan berikut:

Enkripsi: $y_i = E(x_i) = \big(ax_i + \lambda(v \cup e)\big) mod\ m$

Dekripsi: $D(y_i) = a^{-1}\big(y_i - \lambda(v \cup e)\big) mod\ m$

Berdasarkan penggunaan struktur pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super pada$t$-*copy* graf roda terhubungdalam memodifikasi teknik sandi *Affine* tersebut, teknik tersebut dapat diimplementasikan untuk pengamanan data dalam *server* FTP pada saat transfer *file*. Sehingga dapat menjamin keamanan *file transfer* dari serangan *Sniffer* (penyadap).

SARAN

Saran yang dapat diberikan pada penulisan skripsi ini yaitu penelitian selanjutnya dapat mencari pelabelan total (a, d)-sisi-anti ajaib super pada$t$-*copy* graf roda terhubung dengan $d = 2$, serta dapat mencari konstruksi umum pelabelantotal (a, d)-sisi-anti ajaib pada$t$-*copy* graf roda terhubung $W_{t,n}$dan menjadikannya struktur pola yang dapat digunakan dalam memodifikasi sandi-sandi lainnya dalam teknik kriptografi.

REFRENSI

[1] Aryus, Dony. (2008). *Pengantar Ilmu Kriptografi Teori Analisis dan Implementasi*. Yogyakarta.

[2] Baca, M. Lin, Y. Miller, M. and Youssef, M. Z. (2007). Edge-antimagic graphs. *Discrete Mathematics*, 307, pp. 1232-1244.

[3] Dafik. Miller, M. Ryan, Joe. and Baca, M. (2009). On super (a, d)-edge-antimagic total labeling of disconnected graphs. *Discrete Mathematichs*, 309, pp. 4909-4915.

[4] Gross, Jonathan L. and Yellen, Jay. (2006). *Graph Theory And Its Applications,* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

[5] Hartsfield, N. and Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, San Diego.

[6] Sudarsana, I. Wayan. Hendra, A. Adiwijaya and Setyawan, D. Y. (2012). On Super Edge Antimagic Total Labeling for t-joint Copies of Wheel. *Far East Jounal of Mathematical Science*. pp. 276-283.

[7] Sudarsana, I. Wayan. Laila, R. Lutfi, A. dan Farhamsa, D (2013). Modifikasi Sandi Affine menggunakan Struktur Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib Super (TSAAS) dari t-rangkap Graf Roda dan Aplikasinya pada Pengamanan Data dalam Server FTP. *Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, pp. 33-39.