

APLIKASI KALMAN FILTER DAN ENSEMBLE KALMAN FILTER PADA PENDETEKSIAN GANGGUAN KONDUKSI PANAS PADA KEPING LOGAM BERBENTUK SILINDER

Gina Isma Kusuma dan Nina Fitriyati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta
Email: ginaisma@gmail.com

Abstract: Leaks in the cylinder-shaped metal can interfere the heat transfer process. Therefore, we need method that can be used to detect that leak. In this research, we discuss the forecast method to detect the leak's location in the cylinder-shaped metal using a Kalman filter (KF) and Ensemble Kalman Filter (EnKF). The state-space equation is constructed by discretization of the diffusion equation using Forward-Time Central Space Method. The simulated data are generated by the analytical solution of diffusion equation. In EnKF methods, we used the number of ensembles 100, 200, 300, 400, and 500. The simulation result shows that these two methods are able to detect the location of leaks in the cylinder-shaped metal. In the EnKF method, the best detection is obtained when the ensemble's numbers is 500 because the average of errors is smaller than the average of errors using the other ensemble numbers. In addition, the simulation result also shows that the EnKF method is more accurate than the Kalman filter method because the average of error and the average of norm of the error covariance matrix are smaller than the Kalman filter's.

Keywords: *Filter Kalman, Ensemble Kalman Filter, Heat Conduction.*

Abstrak: Kebocoran pada keping logam berbentuk silinder dapat mengganggu proses perpindahan panas. Oleh karena itu diperlukan suatu metode yang dapat digunakan untuk mendeteksi kebocoran tersebut. Pada penelitian ini, dibahas pengetimasan lokasi kebocoran pada keping logam berbentuk silinder menggunakan metode Kalman filter (KF) dan Ensemble Kalman Filter (EnKF). Persamaan ruang keadaan dibentuk dari diskritisasi persamaan difusi menggunakan metode Beda Hingga Maju dan Beda Hingga Pusat. Data simulasi dibangkitkan dari solusi analitik persamaan difusi. Pada metode EnKF banyaknya ensemble yang digunakan adalah 100, 200, 300, 400, dan 500 buah. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kedua metode ini mampu mendeteksi dengan baik lokasi kebocoran pada keping logam berbentuk silinder. Pada metode EnKF, pendeteksian terbaik dihasilkan ketika banyak ensemble 500 karena nilai rata-rata error lebih kecil dibandingkan nilai rata-rata error pada banyak ensemble lainnya. Selain itu, hasil simulasi pun menunjukkan bahwa metode EnKF lebih akurat daripada KF karena rata-rata error dan nilai rata-rata norm dari matriks kovariansi errornya lebih kecil dibanding Kalman filter.

Kata kunci: *Filter Kalman, Ensemble Kalman Filter, Konduksi Panas.*

PENDAHULUAN

Perpindahan panas adalah proses berpindahnya panas dari benda yang mempunyai suhu tinggi ke benda yang suhunya lebih rendah. Salah satu proses perpindahan panas melalui suatu media zat padat atau cair disebut dengan konveksi. Perpindahan panas ini terjadi karena kontak langsung diantara partikel-partikel yang mempunyai perbedaan temperatur Konduksi

panas dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial baik menggunakan koordinat kartesius maupun koordinat silinder [5].

Salah satu kendala yang dapat menyebabkan hambatan konduksi panas adalah adanya kebocoran pada media konduktor. Secara matematis, beberapa metode telah dikembangkan untuk mendeteksi kebocoran pada logam diantaranya adalah filter Kalman dan metode-metode yang merupakan pengembangan dari filter Kalman. Filter Kalman pertama kali dikembangkan oleh R. E. Kalman pada tahun 1960 [8]. Algoritma filter Kalman telah berhasil diaplikasikan pada beberapa bidang diantaranya pada masalah navigasi [16], pada ketinggian dan kecepatan air laut [15], dan pada model populasi plankton di perairan dangkal [13].

Filter Kalman hanya dapat digunakan untuk sistem dinamik linier. Oleh karena itu, beberapa peneliti mengembangkan filter Kalman untuk mengatasi masalah dinamik nonlinier, diantaranya Extended Kalman Filter (EKF) dan Ensemble Kalman Filter (EnKF). Kedua metode tersebut memiliki karakteristik yang berbeda, Extended Kalman Filter (EKF) dapat diterapkan pada metode filter Kalman dengan melinierkan fungsi pada persamaan keadaan. Sedangkan metode EnKF, yang dikembangkan oleh Evensen [4], dijalankan pada persamaan keadaan yang nonlinier dan membangkitkan beberapa buah keadaan awal yang disebut ensemble.

Aplikasi EnKF pada masalah gangguan konduksi panas satu dimensi pada batang logam telah dilakukan oleh Apriliani dan Sofiyanti [1]. Pada penelitian ini, penulis mencoba membandingkan hasil pendeteksian gangguan panas pada keping logam berbentuk silinder menggunakan metode filter Kalman dan EnKF. Persamaan keadaan akan dibentuk dari diskritisasi persamaan difusi. Karena keterbatasan data mengenai konduksi panas pada keping logam berbentuk silinder, data yang diasimilasikan pada tahap koreksi akan dibangkitkan dari solusi analitik persamaan difusi.

METODOLOGI PENELITIAN

Konduksi Panas pada Keping Logam berbentuk Silinder

Perpindahan panas adalah perpindahan energi karena adanya perbedaan suhu. Secara umum ada tiga cara berbeda dalam perpindahan panas yaitu: konduksi, radiasi dan konveksi. Hanya pada konduksi dan radiasi yang dapat digolongkan ke dalam proses perpindahan panas, karena hanya kedua mekanisme ini yang tergantung pada beda suhu. Sedangkan konveksi tidak secara tepat memenuhi definisi perpindahan panas, karena untuk perpindahannya bergantung pada transport massa mekanik. Namun karena konveksi juga menghasilkan perpindahan energi dari daerah yang bersuhu lebih tinggi ke daerah yang lebih rendah, maka istilah konveksi telah diterima secara umum [12].

Konduksi adalah perpindahan kalor melalui zat penghantar tanpa disertai perpindahan bagian-bagian zat itu. Perpindahan kalor dengan cara konduksi pada umumnya terjadi pada zat padat. Suatu zat dapat menghantar kalor disebut konduktor, seperti berbagai jenis logam. Sedangkan zat penghantar kalor yang buruk disebut isolator, pada umumnya benda-benda non logam. Contoh konduksi adalah memanaskan batang besi di atas nyala api. Apabila salah satu ujung besi dipanaskan, kemudian ujung yang lain dipegang, maka semakin lama ujung yang dipegang semakin panas. Hal ini menunjukkan bahwa kalor atau panas berpindah dari ujung besi yang dipanaskan ke ujung besi yang dipegang.

Menurut Carslaw dan Jeager [3] persamaan panas dimensi tiga dalam koordinat silinder dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

Jika silinder yang bersumbu bertepatan dengan sumbu z dipanaskan, kondisi awal dan kondisi batas independent dari koordinat θ dan z , suhu hanya akan menjadi fungsi r dan t , maka persamaan menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

Dalam hal ini aliran panas berlangsung pada bidang tegak lurus dengan aliran yang radial. Ketika kondisi awal dan kondisi batas tidak mengandung z , dan aliran panas terjadi pada bidang tegak lurus, persamaan konduksi menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right).$$

Ketika kondisi awal dan kondisi batas tidak mengandung θ , aliran panas berlangsung di bidang tegak lurus maka persamaan konduksi menjadi:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).$$

Pada permasalahan konduksi panas dapat diklasifikasikan sebagai keadaan tetap (*steady state*) atau keadaan tidak tetap (*unsteady state*). Keadaan tetap merupakan kondisi ketika beberapa variabel proses seperti tekanan, temperatur, letak atau posisi tidak berubah terhadap waktu. Keadaan tetap ini sangat diharapkan dalam terjadinya suatu proses. Dengan keadaan tetap, suatu proses akan semakin mudah diatur dan direncanakan. Persamaan konduksi panas satu dimensi dalam keadaan tetap, dengan suhu tetap yang jari-jari luar dan dalamnya masing-masing adalah a dan b , berdasarkan Persamaan (1) adalah [3]:

$$\frac{dv}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0, \quad a < r < b. \quad (2)$$

Solusi umum Persamaan (2) adalah

$$v = A + B \ln r, \quad (3)$$

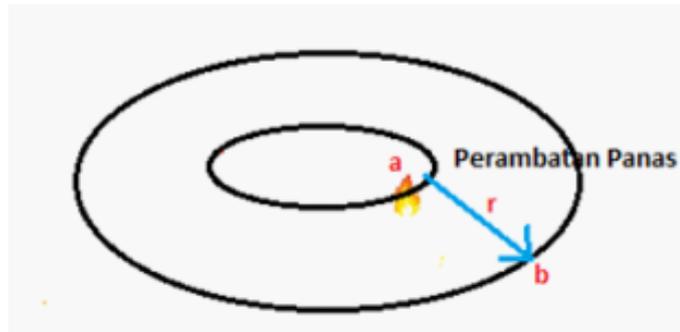
dengan v adalah temperatur, A dan B adalah konstanta yang ditentukan dari kondisi batas di $r = a$ dan $r = b$.

Berdasarkan persamaan (2), persamaan konduksi panas satu dimensi dalam keadaan tetap adalah sebagai berikut:

$$\frac{dv}{dr} + r \left(\frac{dv^2}{dr^2} \right) = 0,$$

$$\frac{dv}{dr} = -r \left(\frac{dv^2}{d^2r} \right) \quad (4)$$

Persamaan (4) akan diaplikasikan pada keping logam berbentuk silinder yang akan diberi titik api dalam keping logam berbentuk silinder (Gambar 1). Panas pada pusat keping logam berbentuk silinder akan merambat ke sisi lainnya. Dengan menggunakan Persamaan (4) dapat diprediksi temperatur di keping logam berbentuk silinder pada jari-jari r dan pada setiap waktu t .



Gambar 1. Perambatan Panas Pada Keping Logam Berbentuk Silinder.

Pada Gambar 1 keping logam berbentuk silinder penghantar panas mempunyai distribusi temperatur awal pada $t = 0$, dan sisi dalam serta luarnya mempunyai temperatur yang merupakan fungsi waktu. Temperatur di keping logam berbentuk silinder pada waktu $t > 0$ dapat dihitung dengan anggapan bahwa sifat-sifat fisik keping logam berbentuk silinder adalah konstan. Permasalahan ini dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial dengan kondisi awal dan batas.

Persamaan (3) dapat dipresentasikan dengan kondisi awal dan batas adalah:

$$v(r, 0) = 0,$$

$$v(a, t) = v_1, \quad a < r < b,$$

$$v(b, t) = v_2, \quad a < r < b,$$

dengan kondisi batas di atas, solusi umum Persamaan (3) memiliki nilai $A = v_1$ dan $B = v_2$ jika kondisi batas $r = a$ dan $r = b$.

1. Diskritisasi Model

Salah satu metode yang digunakan pada diskritisasi persamaan diferensial adalah beda hingga. Metode beda hingga merupakan metode klasik yang dipergunakan sebagai pendekatan dalam menghitung turunan numerik dalam rangka menyelesaikan suatu pemodelan yang memiliki bentuk persamaan diferensial. Aplikasi penting dari metode beda hingga adalah dalam analisis numerik, khususnya pada persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Prinsipnya adalah mengganti turunan pada persamaan diferensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Secara fisis, deret Taylor dapat diartikan sebagai besaran tinjauan pada suatu ruang dan waktu (ruang dan waktu tinjauan) dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang

mempunyai perbedaan yang kecil dengan ruang dan waktu tinjauan. Metode beda hingga bersifat eksplisit, artinya keadaan suatu sistem atau solusi variabel pada suatu saat dapat digunakan untuk menentukan keadaan sistem pada waktu berikutnya. Berbeda dengan metode implisit, yang mana penentuan solusi sistem harus dengan memecahkan sistem pada kedua keadaan, sekarang dan yang akan datang [10].

Diskritisasi $\frac{d}{dr}$ pada persamaan (3) digunakan untuk mengetahui prediksi kedepannya

dan metode beda hingga pusat untuk $\frac{d^2v}{dr^2}$, karena memiliki error paling minimum diantara beda hingga lainnya. Sehingga dari Persamaan (3) diperoleh:

$$v_i^{k+1} = pv_{i+1}^k + (1 - 2)v_i^k + pv_{i-1}^k. \tag{4}$$

dengan

$$p = -r \frac{\Delta r}{\Delta r^2}.$$

Kondisi awal adalah $v(r, 0) = 0$ dan untuk kondisi batas adalah $v(a, t) = 100$ dan $v(b, t) = 25$ untuk $a < r < b$. Sehingga diperoleh bentuk umum hasil diskritisasi adalah

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & p & 1-2p & p & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & p & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & p & 1-2p \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} pv_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^{k+1}, A = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p & 1-2p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & p & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & p & 1-2p \end{bmatrix}^k$$

$$x_k = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^k, B = pv_0, u_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Maka dapat dituliskan:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \quad (5)$$

2. Representasi Ruang Keadaan

Ruang keadaan terdiri dari dua persamaan: persamaan keadaan dan persamaan pengukuran. Persamaan keadaan akan dibentuk dari Persamaan 5. Pada Persamaan 5 diasumsikan bahwa sistem tersolasi secara sempurna, namun kenyataannya tidak demikian, terdapat perpindahan panas antara keping logam dan udara. Gangguan pada sistem disebut noise. Misalkan noise ini dinotasikan dengan w_k , maka

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ed_k + w_k, \quad (6)$$

dengan w_k matriks error yang diasumsikan berdistribusi $N(0, Q)$. Persamaan (6) disebut dengan persamaan keadaan [7].

Persamaan pengukuran dibentuk dari

$$z_{k+1} = Hx_k + \eta_k, \quad (7)$$

dengan η_k matriks gangguan pada persamaan pengukuran yang diasumsikan berdistribusi $N(0, R)$.

3. Algoritma Filter Kalman

Filter Kalman merupakan salah satu penemuan terbesar abad ke-20 di bidang teori estimasi secara statistik. Filter Kalman diperkenalkan oleh R. E. Kalman pada tahun 1960 [8]. Konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan filter Kalman adalah teori peluang, kuadrat terkecil dan sistem dinamik pada tingkat paling mendasar, dan konsep tentang proses stokastik dan metode rata-rata kuadrat pada tingkat berikutnya.

Ide dasar dari filter Kalman adalah menyatakan sistem dinamik ke dalam bentuk khusus yang disebut representasi ruang keadaan. Filter Kalman adalah algoritma untuk meng-update proyeksi linier sistem ini secara sekuensial [7]. Filter Kalman dapat mengestimasi keadaan dari suatu proses dengan cara meminimalkan rataan galat kuadrat. Filter ini sangat tangguh dalam beberapa aspek: dapat mengestimasi keadaan yang lalu, keadaan sekarang, dan keadaan yang akan datang, serta dapat digunakan pada sistem yang memuat observasi yang tidak diketahui [16]. Terdapat 2 tahap pada algoritma filter Kalman: tahap prediksi dan tahap koreksi dengan keadaan awal dibangkitkan dari distribusi normal. Berikut adalah algoritma filter Kalman:

Tahap Inisialisasi: Tentukan keadaan awal: $x_0^u \sim N(\mu_0, P_0)$

Tahap Prediksi

$$\text{Keadaan: } x_k^f = Ax_{k-1}^u, \quad (8)$$

$$\text{Matriks Kovariansi: } P_k^f = AP_k^u A^T + Q, \quad (9)$$

Tahap Koreksi

$$\text{Keadaan: } x_k^u = x_k^f + K(z_k - Hx_k^f), \quad (10)$$

$$\text{dengan Kalman gain } K_k = P_k^f H^T (HP_k^f H^T + R)^{-1}, \quad (11)$$

$$\text{Matriks Kovariansi: } P_k^u = (I - K_k H) P_k^f. \quad (12)$$

4. Algoritma EnKF

Sejak Evensen memperkenalkan metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada tahun 1994 [4], metode ini telah banyak dipergunakan sebagai teknik asimilasi data sekuensial. Algoritma EnKF didasarkan pada representasi ruang keadaan yang diformulasikan pada Persamaan (6) dan (7).

Untuk sistem dinamik linier EnKF konvergen ke Kalman Filter [2, 6, 11, 14]. Penelitian mengenai kekonvergenan secara peluang dari EnKF diperlukan untuk menjustifikasi validitas EnKF. Ide dasar pada algoritma EnKF adalah untuk memperoleh filter yang digunakan untuk skala besar pada system non linier. EnKF adalah implementasi Monte Carlo dari Kalman Filter untuk sistem dinamik yang non linier dimana keadaan (*state*) awal dibangkitkan menggunakan sample, disebut dengan ensemble, dan matriks kovariansi diaproksimasi menggunakan kovarianse sample. Simulasi EnKF dijalankan berulang kali secara independen kemudian mengasimilasikan data baru dan memperbaharui model secara simultan.

Pada dasarnya persamaan yang digunakan pada metode EnKF sama dengan persamaan yang ada pada filter Kalman yaitu persamaan (8) – (12), namun pada metode EnKF keadaan awal yang dibangkitkan adalah N buah yang disebut ensemble.

Tahap inisialisasi: Definisikan ensemble awal $x_{0,i}^a \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$, $i = 1, 2, \dots, N$

Tahap Prediksi

$$\text{Keadaan: } x_{k,i}^f = f(X_{k-1,i}^u), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{Matriks Kovariansi: } P_k^f = AP_k^u A^T + Q$$

Tahap Koreksi

$$\text{Keadaan: } x_k^u = x_k^f + K(z_k - Hx_k^f)$$

$$\text{dengan } K_k = P_k^f H^T (HP_k^f H^T + R)^{-1}$$

$$\text{Matriks Kovariansi: } P_k^u = (I - K_k H) P_k^f$$

Rata-rata keadaan setelah tahap koreksi adalah: $\bar{x}_k^f = \sum_{i=1}^N \bar{x}_{k,i}^f$ dan $\bar{x}_k^u = \sum_{i=1}^N \bar{x}_{k,i}^u$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

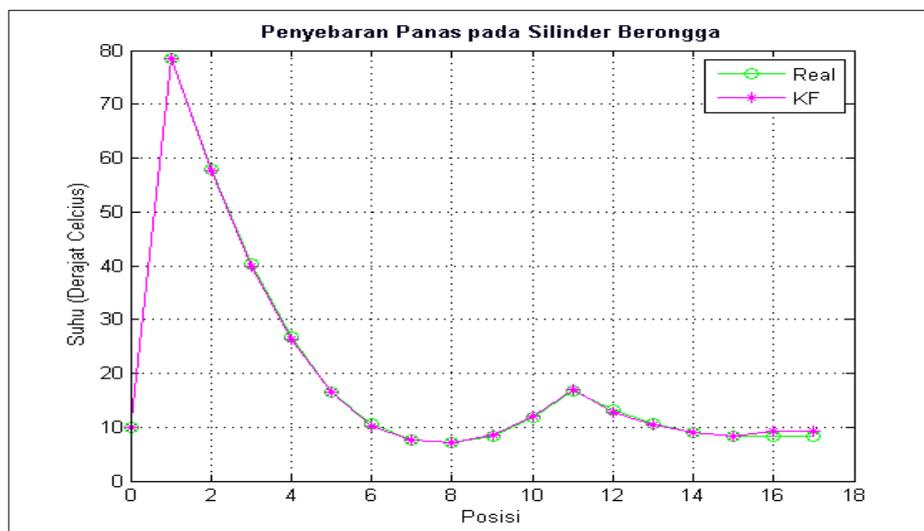
Pada metode filter Kalman diberikan nilai kovariansi awal sebesar $P_0 = 0,01$. Iterasi dilakukan sebanyak $T = 100$ dengan variansi noise sistem $Q_k = 0,01$ dan variansi noise pengukuran $R_k = 0,01$ dan $H = 1$. Jika suhu awal 100^0 , maka konduksi panas pada persamaan (4) yang tidak diberi gangguan dapat dilihat pada Gambar (2).



Gambar 2. Penyebaran Panas Pada Keping Logam Berbentuk Silinder Tanpa Gangguan.

Hasil Simulasi Menggunakan Metode Filter Kalman

Pada simulasi gangguan, gangguan diletakkan pada posisi yang telah ditentukan. Simulasi pertama dengan satu gangguan diberikan sebesar 56^0C pada posisi grid ke (1,12). Maka hasil dapat dilihat pada gambar berikut ini:



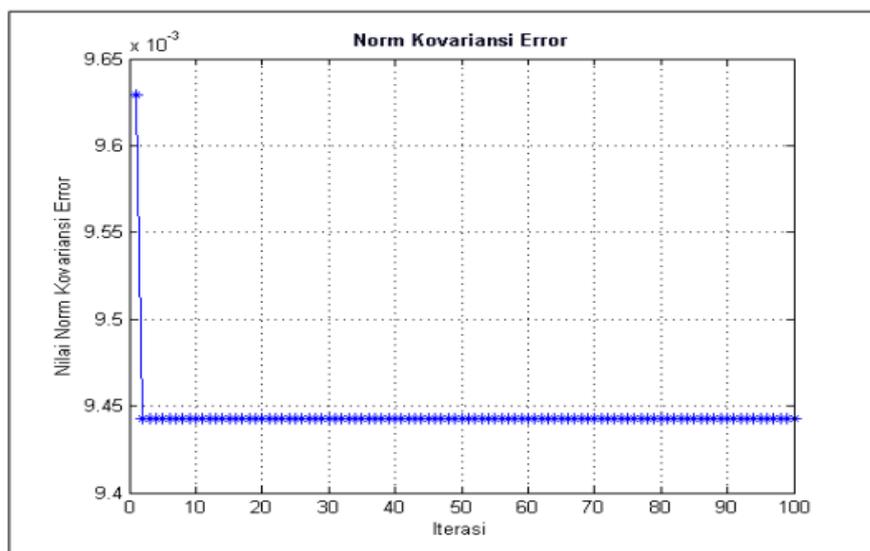
Gambar 3. Hasil Estimasi Satu Gangguan menggunakan Metode Filter Kalman.

Gambar 3 menunjukkan hasil estimasi letak gangguan menggunakan metode filter Kalman yaitu pada posisi ke-11. Terlihat bahwa pada posisi pertama sampai posisi ke-8 temperatur

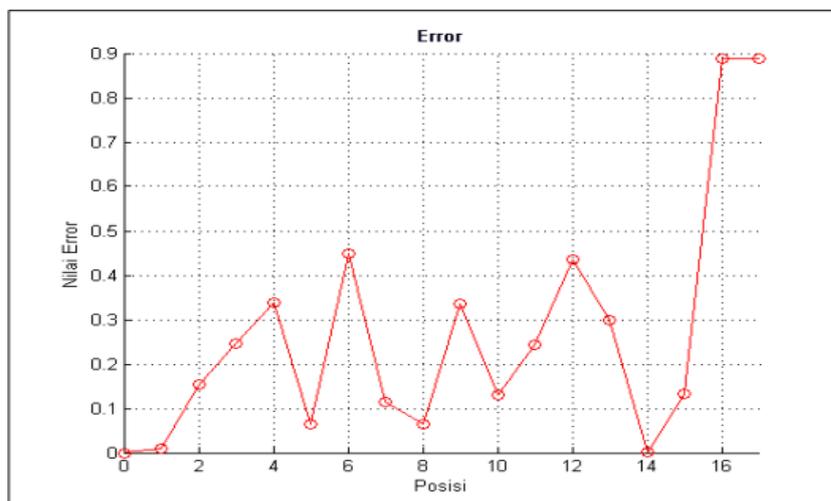
menurun secara kontinu, kemudian pada posisi ke-9 perlahan temperatur naik sampai posisi ke-11 dan temperaturnya turun kembali.

Hasil simulasi pada filter Kalman dievaluasi dengan cara membandingkan nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error dengan nilai error dihitung menggunakan formula $error = abs(x_{real} - x_{cor})$, dimana x_{real} merupakan nilai numerik dan x_{cor} merupakan nilai estimasi. Sedangkan untuk mencari nilai rata-rata menggunakan formula mean (error).

Gambar 5 menunjukkan nilai norm kovariansi error yaitu untuk mengetahui seberapa besar kesalahan yang dihasilkan. Dari hasil simulasi diperoleh nilai norm kovariansi error sebesar 0,00944. Sedangkan pada Gambar 6 menunjukkan nilai error yang didapat dari simulasi dan diperoleh nilai error sebesar 0,34912.

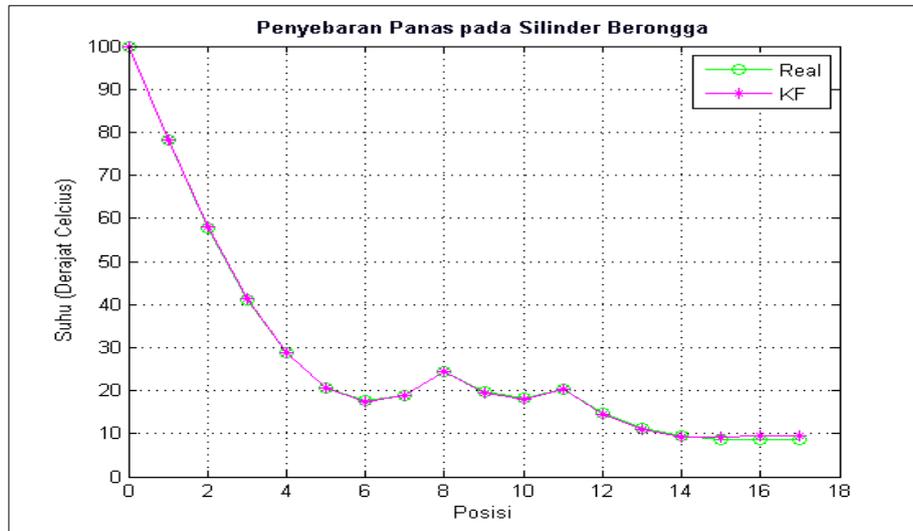


Gambar 5. Norm Matriks Kovariansi Error pada Simulasi Filter Kalman dengan Satu Gangguan



Gambar 6. Error pada Simulasi Filter Kalman dengan Satu Gangguan

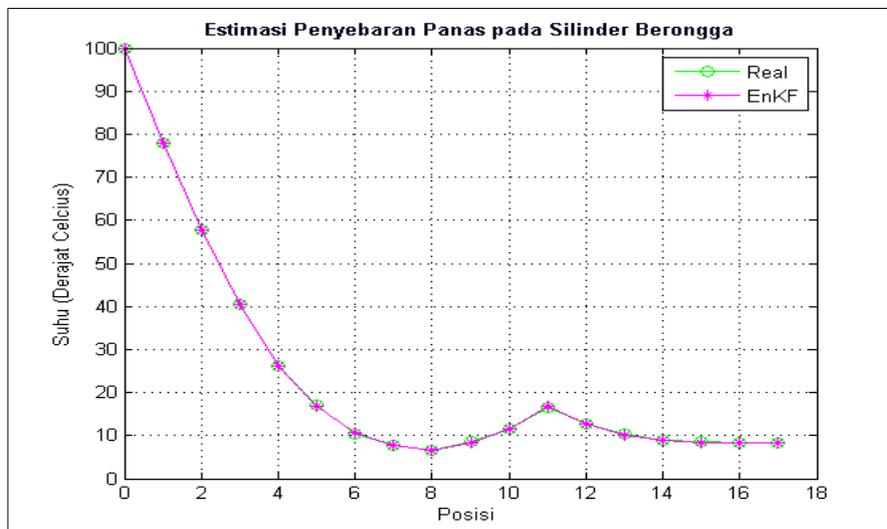
Hasil simulasi pendeteksian letak dua gangguan diperlihatkan pada Gambar 7. Pada gambar ini, ditunjukkan hasil estimasi letak dua gangguan yaitu pada posisi ke-8 dan posisi ke-11. Terlihat bahwa pada posisi pertama sampai posisi ke-6 temperatur menurun secara kontinu, kemudian pada posisi ke-7 perlahan temperatur naik sampai posisi ke-8 dan suhu turun lagi selanjutnya temperatur naik lagi pada posisi ke-11. Nilai norm kovariansi error pada dua gangguan adalah 0,00944 dengan grafik hampir sama dengan Gambar 5. Sedangkan nilai error sebesar 0,38960 dengan dengan grafik hampir sama dengan Gambar 6.



Gambar 7. Hasil Estimasi Dua Gangguan menggunakan Metode Filter Kalman.

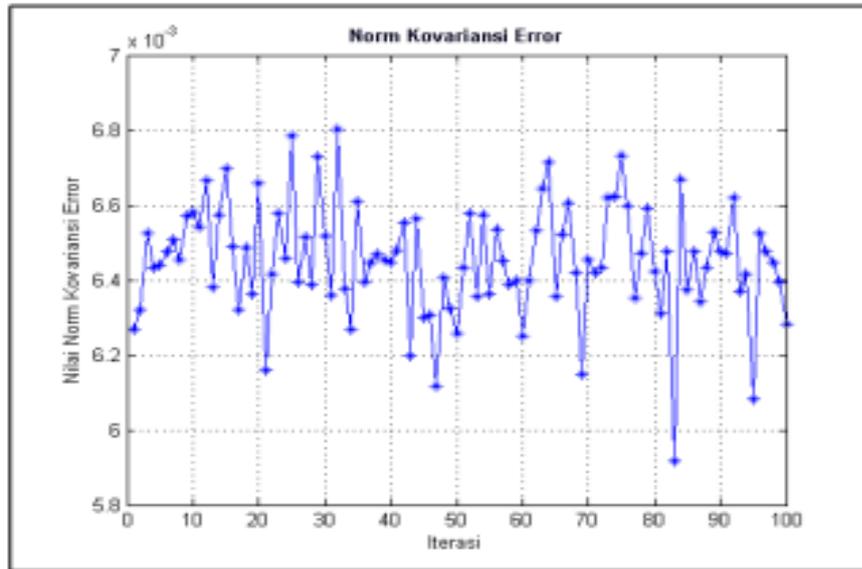
Hasil Simulasi Menggunakan Metode EnKF

Pada simulasi deteksi gangguan menggunakan EnKF, diberikan nilai kovariansi awal sebesar $P_0 = 0,01$. Iterasi dilakukan sebanyak $T = 100$ dengan variansi noise sistem $Q = 0,01$ dan variansi noise pengukuran $R = 0,01$. Simulasi dilakukan dengan mencoba beberapa N_ϵ ensemble, yaitu 100, 200, 300, 400, dan 500. Simulasi dilakukan dengan besar dan letak gangguan sama seperti percobaan filter Kalman. Berikut adalah hasil estimasi menggunakan metode EnKF dengan $N_\epsilon = 500$.

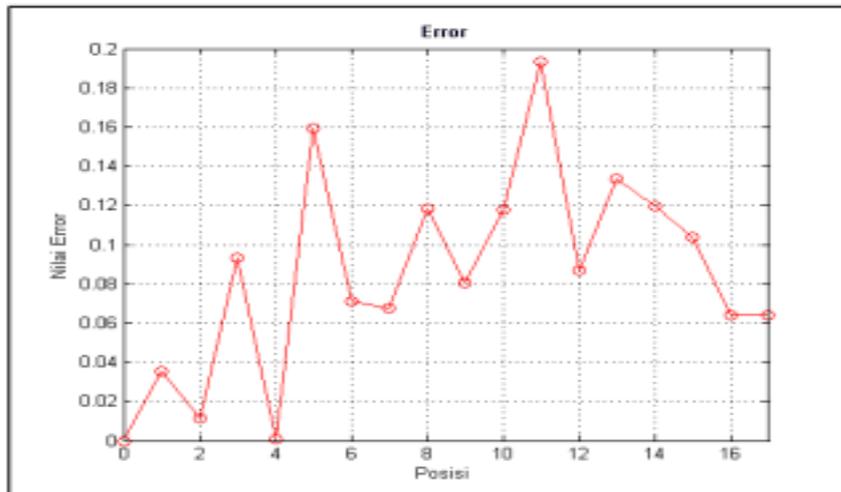


Gambar 8. Hasil Estimasi Satu Gangguan menggunakan Metode EnKF

Gambar 8 menunjukkan hasil estimasi satu gangguan menggunakan metode EnKF. Pada grafik di atas dapat dilihat adanya gangguan yang ditunjukkan dengan adanya kenaikan temperatur pada posisi ke-11. Terlihat bahwa pada posisi pertama sampai posisi ke-8 temperature menurun secara kontinu, kemudian pada posisi ke-9 perlahan suhu naik sampai posisi ke-11 lalu temperaturnya turun kembali. Gambar 9 menunjukkan nilai norm kovariansi error pada estimasi satu gangguan menggunakan metode EnKF pada dengan ensemble 500 sebesar 0,00567. Gambar 10 menunjukkan nilai error yang didapat dari simulasi dengan nilai error sebesar 0,04231.



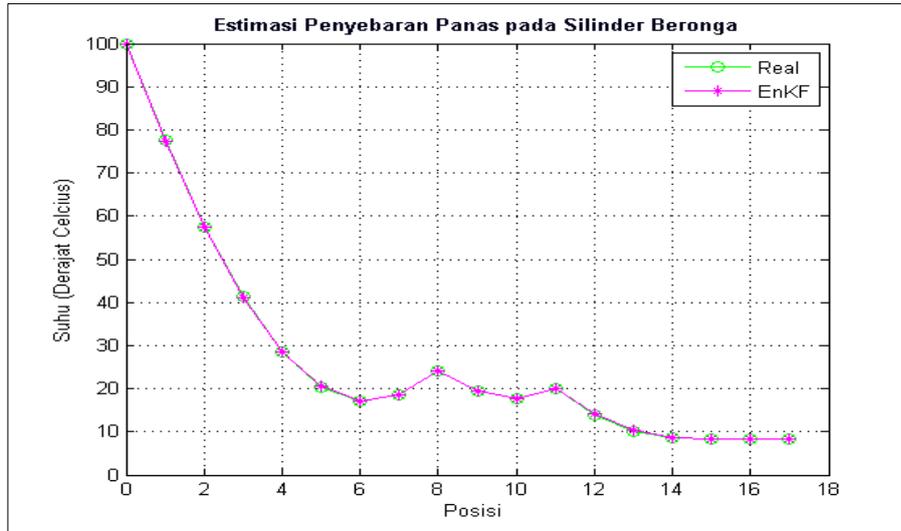
Gambar 9. Norm Kovariansi Error pada Estimasi Satu Gangguan menggunakan Metode EnKF



Gambar 10. Error pada Estimasi Satu Gangguan menggunakan Metode EnKF

Gambar 11 menunjukkan hasil estimasi dua gangguan menggunakan metode EnKF. Pada grafik ini terlihat adanya gangguan yang ditunjukkan dengan kenaikan temperature pada posisi ke-8 dan posisi ke-11. Dapat dilihat pula bahwa pada posisi pertama sampai posisi ke-6 temperatur menurun secara kontinu, kemudian pada posisi ke-7 perlahan temperatur naik sampai posisi ke-8 dan temperatur turun lagi selanjutnya temperatur naik lagi pada posisi ke-

11. Sehingga dari grafik estimasi terlihat bahwa pada posisi ke-8 dan posisi ke-11 terdapat gangguan yaitu dengan panas yang masuk, atau bisa dikatakan bahwa pada posisi tersebut terdeteksi adanya gangguan.



Gambar 11. Hasil Estimasi Dua Gangguan menggunakan Metode EnKF Dengan.

Tabel 2 memperlihatkan nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error dengan mencoba beberapa ensemble yaitu 100, 200, 300, 400, dan 500. Dengan melihat nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error dapat diketahui seberapa besar kesalahan yang dihasilkan pada hasil simulasi menggunakan metode filter kalman maupun metode EnKF.

Tabel 1. Rata – Rata Norm Kovariansi Error dan Rata – Rata Error dari Hasil Estimasi Gangguan menggunakan Metode EnKF

	Ensemble Kalman Filter (EnKF)				
	$N_{\epsilon} = 100$	$N_{\epsilon} = 200$	$N_{\epsilon} = 300$	$N_{\epsilon} = 400$	$N_{\epsilon} = 500$
EnKF dengan Satu Gangguan					
Rata – Rata Norm Kovariansi Error	0.00635	0.006	0.00582	0.00574	0.00567
Rata – Rata Error	0.06046	0.10216	0.05849	0.06273	0.04231
EnKF dengan Dua Gangguan					
Rata – Rata Norm Kovariansi Error	0.00637	0.006	0.00584	0.00574	0.00566
Rata – Rata Error	0.06062	0.06492	0.0628	0.05424	0.05057

Dari Tabel 1 terlihat bahwa nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error dari metode EnKF dengan satu gangguan pada 100 sampai 500 ensemble. Pada 100 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00635 dan rata-rata error sebesar 0,06046. Pada 200 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,006 dan rata-rata error sebesar 0,10216. Pada 300 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00582 dan rata-rata error sebesar 0,05849. Pada 400 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00574 dan rata-rata error sebesar 0,06273. Sedangkan pada 500 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00567 dan rata-rata error sebesar 0,04231.

Selanjutnya nilai rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error dari metode EnKF dengan dua gangguan, pada 100 sampai 500 ensemble. Pada 100 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00637 dan rata-rata error sebesar 0,06062. Pada 200 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,006 dan rata-rata error sebesar 0,06492. Pada 300 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00584 dan rata-rata error sebesar 0,0628. Pada 400 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00574 dan rata-rata error sebesar 0,05424. Sedangkan pada 500 ensemble diperoleh rata-rata norm kovariansi error sebesar 0,00566 dan rata-rata error sebesar 0,05057.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin banyak jumlah ensemble yang diambil maka nilai rata-rata norm kovariansi error-nya semakin kecil. Dan untuk nilai rata-rata error, pada 100 sampai 400 ensemble nilainya relatif lebih besar dari nilai rata-rata error pada 500 ensemble. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil estimasi terbaik adalah percobaan dengan menggunakan 500 ensemble karena memiliki rata-rata norm kovariansi error dan nilai rata-rata error paling kecil baik pada Ensemble Kalman Filter.

Tabel 2 menyajikan perbandingan Perbandingan Rata – Rata Norm Kovariansi Error dan Rata – Rata Error Hasil Estimasi Gangguan menggunakan Metode Filter Kalman dan Metode EnKF (dengan $N_\varepsilon = 500$). Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat bahwa metode EnKF dengan 500 ensemble memiliki nilai rata-rata norm kovariansi error dan rata-rata error lebih kecil yaitu 0.00567 dan 0.04231 dari metode filter Kalman yaitu 0.00944 dan 0.34912 untuk filter Kalman dan EnKF satu gangguan. Serta untuk filter Kalman dan EnKF dua gangguan bahwa metode EnKF dengan 500 ensemble memiliki nilai rata-rata norm kovariansi error dan rata-rata error lebih kecil yaitu 0.00566 dan 0.05057 dari metode filter Kalman yaitu 0.00944 dan 0.38960. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa metode EnKF dengan jumlah 500 ensemble dalam kasus ini lebih akurat dari metode filter Kalman karena metode EnKF memiliki nilai rata-rata norm kovariansi error dan rata-rata error yang lebih kecil.

Tabel 2 Perbandingan Rata – Rata Norm Kovariansi Error dan Rata – Rata Error Hasil Estimasi Gangguan menggunakan Metode Filter Kalman dan Metode EnKF (dengan $N_\varepsilon = 500$)

Filter Kalman dan EnKF dengan Satu Gangguan		
	EnKF dengan $N_\varepsilon = 500$	Filter Kalman
Rata – Rata Norm Kovariansi Error	0.00567	0.00944
Rata – Rata Error	0.04231	0.34912
Filter Kalman dan EnKF dengan Dua Gangguan		
	EnKF dengan $N_\varepsilon = 500$	Filter Kalman
Rata – Rata Norm Kovariansi Error	0.00566	0.00944
Rata – Rata Error	0.05057	0.38960

KESIMPULAN

Pada penelitian ini, metode filter Kalman dan Ensemble Kalman Filter (EnKF) diaplikasikan pada masalah pendeteksian gangguan panas pada keeping logam berbentuk silinder. Representasi ruang keadaan dibentuk berdasarkan diskritisasi persamaan difusi menggunakan metode Forward-Time Central Space (FTCS). Data simulasi dibangkitkan dari solusi analitik persamaan difusi. Simulasi dilakukan terhadap satu dan dua gangguan panas

pada logam silinder. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode filter Kalman dan EnKF secara umum mampu mendeteksi adanya gangguan panas. Pendeteksian satu gangguan maupun dua gangguan menggunakan metode EnKF lebih akurat dibandingkan dengan metode filter Kalman. Hal ini terlihat dari nilai rata-rata norm kovariansi error dan rata-rata error pada EnKF lebih kecil dibandingkan dengan filter Kalman.

REFERENSI

- [1] Apriliani, E. dan W. Sofiyanti, 2010, *The Sensitivity Of Ensemble Kalman Filter To Detect The Disturbance Of One Dimensional Heat Transfer*, Surabaya: Jurusan Matematika ITS.
- [2] Butala, M. D., Yun, J., Chen, Y., Frazin, R. A. dan Kamalabadi, F, 2008, Asymptotic Convergence of The Ensemble Kalman Filter, *15th IEEE International Conference on Image Processing*.
- [3] Carslaw, H. dan Jaeger, J., 1959, *Conduction of Heat In Solids, Second Edition*, London: The Clarendon Press.
- [4] Evensen, G., 2003, The Ensemble Kalman Filter: Theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamic*. 53, 343-367.
- [5] Gerald, C.F. dan P. O. Wheatley – 7th ed., 2004, *Applied Numerical Analysis*, Pearson Education, Inc.
- [6] Gland, F. L., V. Monbet dan V. D. Tran, 2009, *Large Sample Asymptotics for Ensemble Kalman Filter*, Institut National De Recherche En Informatique En Automatique.
- [7] Hamilton, J. D., 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton New Jersey.
- [8] Kalman, R. E., 1960. A New Approach to Linear Filtering and Predictions Problems, *Journal of Basic Engineering* 82, 34-45.
- [9] Kreith, F., 2005, *Principles Heat Transfer*. Harper & Row Publisher.
- [10] Li, A. & S. Winront, 2010, *A Story of Why Some Companies Can Creat Competitive Advantage from Using Technology-Based Self-Service*, Stockhom School of Economics, Bachelor Thesis in Management.
- [11] Mandel, J., L. Cobb dan J. D. Beezley, 2009, On The Convergence of The Ensemble Kalman filter, University of Colorado Denver CCM Report 278 <http://www.arXiv.org/abs/0901.2951>.
- [12] Ozisik, M. N., 1993, *Heat Conduction*, United State of America: John Wiley & Sons, inc.
- [13] Purnomo, K. D., 2008, Aplikasi Metode Ensemble Kalman Filter pada Model Populasi Plankton, Tidak Diterbitkan, Tesis, Surabaya: Program Pascasarjana ITS.
- [14] Tan, M., 2011, *Mathematical Properties of Ensemble Kalman Filter*, Dissertation of Faculty of the USC Graduate School University of California, California.
- [15] Verlaan, M., 1998, *Efficient Kalman Filtering For Hydrodynamic Models*, PhD Thesis, Delft, Univeersity of Technology.
- [16] Welch, G & G. Bishop, 2004, *An Introduction to Kalman Filter*, Department of North Carolina at Chapel Hill.