RUANG BARISAN SELISIH $\boldsymbol{c_0(\Delta_m), c(\Delta_m), \ell_\infty(\Delta_m)}$ DAN $\boldsymbol{\ell_p(\Delta_m)}$

Oleh:

Hery Suharna

Universitas Khairun Ternate

ABSTRACT

Ruang urutan sebagai salah satu konsep dalam analisis, membahas tentang urutan yang ruang urutan c_0, c, ℓ_∞ and ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$. Beberapa hasil penelitian sebelumnya membuktikan bahwa ruang urutan c_0, c, ℓ_∞ and ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ adalah ruang Banach, Solid dan BK-Ruang. Berdasarkan ilustrasi di atas, tesis ini akan membahas tentang perbedaan urutan ruang $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ dan $\ell_p(\Delta_m)$ untuk semua m ∈ N, adalah ruang Banach, Solid, BK-Ruang dan Pengoperasian dari perbedaan ruang urutan linear yang berkesinambungan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan mempelajari dan bahan memeriksa tentang perbedaan urutan ruang$\ell_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ dan $\ell_p(\Delta_m)$ untuk semua m ∈ N melalui karya ilmiah yang terkandung dalam sebuah publikasi dari jurnal yang sama dan buku teks yang mendukung. Hasil penelitian ini membuktikan bahwa perbedaan urutan spaces $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ dan $\ell_p(\Delta_m)$ untuk semua m ∈ N, adalah ruang Banach, Solid, BK-Ruang dan Pengoprasian dari perbedaan ruang urutan linear yang berkesinambungan.

Kata Kunci : Ruang Norm, Solid, BK-Ruang (Banach Kontinyu) dan Operator Linear Kontinu

Sequences spaces as one concept in analysis, discussing about sequences which are sequences spaces c_0, c, ℓ_∞ and ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$. Some previous resecrhes han proved that sequences spaces c_0, c, ℓ_∞ and ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ are Banach spaces, Solid and BK-Spaces.

Based on illustration above, this thesis will discuss abouth differences sequences spaces $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ and $\ell_p(\Delta_m)$ for all $m \in \mathbb{N}$, are Banach spaces, Solid, BK-Spaces and and operator from the defferences sequences spaces is linear and continuous. The method that used in this thesis are by studying and examining materials about differences sequences spaces $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ and $\ell_p(\Delta_m)$ for all $m \in \mathbb{N}$ through scientifit work which be contained in a publication of same journal and supporting text book.

The result of this research proved that differences sequences spaces $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ and $\ell_p(\Delta_m)$ for all $m \in \mathbb{N}$, are Banach spaces, Solid, BK-Spaces and operator from the defferences sequences spaces is linear and continuous.

Key words : Norm spaces, Solid, BK-Spaces (Banach Continuous) and Linear Continuous Operators

I. Pendahuluan

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti yang memiliki peranan penting dalam perkembangan teknologi dan kamajuan sains. Sudah tidak disangsikan lagi bahwa matematika memegang peranan penting dalam kehidupan manusia. Banyak yang telah disumbangkan matematika bagi peradaban manusia, kamajuan sains dan teknologi dewasa ini tidak lepas dari matematika. Boleh dikatakan bahwa landasan utama kemajuan teknologi dan sains adalah matematika.

Ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis yang membahas tentang barisan yang diantaranya adalah ruang barisan ℓ_∞ , c , c_0, ℓ_p , dan lain-lain. Misalkan S koleksi semua ruang barisan, maka

$$c_0 = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in S : \text{ barisan } \{x_k\} \text{ konvergen ke } 0\}$$
$$c = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in S : \text{ barisan } \{x_k\} \text{ konvergen}\}$$
$$\ell_\infty = \left\{\tilde{x} = \{x_k\} \in S: \ \sup_{k\geq 1}|x_k| < \infty\right\}$$
$$\ell_p = \left\{\tilde{x} = \{x_k\} \in S: \ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty\right\} \text{ dengan } 1 \leq p < \infty$$

Dari gambaran di atas dapat dijelaskan bahwa c_0 adalah koleksi barisan bilangan yang konvergen ke-0, c adalah koleksi semua barisan yang konvergen, ℓ_∞ koleksi barisan bilangan yang $\sup_{k\geq 1}|x_k| < \infty$ dan ℓ_p adalah $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$ dengan $1 \leq p < \infty$. Dari barisan bilangan tersebut, telah diselidiki merupakan ruang Banach, solid (normal), ruang-BK dan lain-lain. Demikian halnya dengan operator pada ruang barisan c_0, c, ℓ_∞ , dan ℓ_p memiliki sifat linear dan kontinu

Dalam buku-buku ruang barisan telah dibuktikan bahwa ruang barisan $c_0, c, \ell_\infty, \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty$ dan lain-lain merupakan ruang Banach, selanjutnya ruang barisan $\ell\infty\Delta m$, $c\Delta m$, $c0\Delta m$ dan $\ell_p(\Delta_m)$ dimana Δ_m degan $m = 1,2.3, \ldots$ dimaksud adalah selisih dari ruang barisan $c_0, c, \ell_\infty, \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|.\|$, Solid (normal), ruang-BK (Banach kontinu) dan apakah operator dari ruang barisan tersebut memiliki sifat linear dan kontinu.

II. Landasan Teori

2.1. Pengertian Dasar

Definisi 2.1.1. *Diketahui X ruang linear. Fungsi dari $x \in X \Longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$, yang mempunyai sifat-sifat:*

(N$_1$) $\|x\| \geq 0$ $untuk\ setiap\ x \in X$

$\|x\| = 0, \quad jika\ dan\ hanya\ jika\ \ x = \theta, (\theta\ vektor\ nol)$

(N$_2$) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ untuk\ setiap\ skalar\ \alpha\ dan\ x \in X$

(N$_3$) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, untuk\ setiap\ x, y \in X,$

disebut **norma** (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut **norma vector** x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|.\|$ disebut **ruang bernorma** (*normed space*) dan dituliskan singkat dengan $(X, \|.\|)$ atau X saja asalkan normanya sudah diketahui.

Teorema 2.1.1 *Setiap ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *merupakan ruang metrik terhadap metrik* d*:*

$$d(x, y) = \|x - y\|, untuk\ setiap\ x, y \in X$$

Berdasarkan *Teorema* 2.1.1 di atas, yaitu setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, maka semua konsep, pengertian, sifat-sifat, serta *Teorema-Teorema* yang berlaku di ruang metrik berlaku pula pada ruang bernorma dengan pengertian

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Definisi 2.1.2 *Barisan* $\{x_n\}$ *di dalam ruang bernorma X dikatakan* ***konvergen*** *(convergent) jika ada* $x \in X$ *sehingga untuk setiap bilangan asli* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *(bergantung pada* ε*), sehingga untuk setiap bilangan asli* $n \geq n_0$ *berlaku.*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

Jika demikian halnya, dikatakan barisan $\{x_n\}$ *konvergen ke* x *atau barisan* $\{x_n\}$ *mempunyai limit x untuk* $n \to \infty$ *dan ditulis dengan*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

atau dapat ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Sedangkan titik* x *disebut titik limit barisan* $\{x_n\}$.

Definisi 2.1.3 *Barisan* $\{x_n\}$ *di dalam ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *disebut* ***barisan Cauchy*** *atau* ***barisan fundamental*** *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0, *sehingga untuk setiap dua bilangan asli* $m, n \geq n_0$ *berlaku* $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$

Teorema 2.1.2 *Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *merupakan barisan Chaucy.*

Definisi 2.1.4 *Ruang bernorma dikatakan* ***lengkap*** *(complete) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.*

Definisi 2.1.5 *Ruang Banach (**Banach spaces**) adalah ruang bernorma yang lengkap.*

Teorema 2.1.3 (Ketaksamaan Ho'lder)

$i.\ untuk\ setiap\ \tilde{x} = \{x_k\} \in \ell^1\ dan\ \tilde{y} = \{y_k\} \in \ell_\infty\ benar\ bahwa$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \bar{y}_k| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

$$dengan\ \ \|\tilde{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\ \ dan\ \|\tilde{y}\| = \sup_{k\geq 1} |y_k|$$

$ii.\ jika\ \ 1 < p, q < \infty\ \ dan\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ maka\ untuk\ setiap\ \tilde{x} = \{x_k\} \in \ell_p$ dan $\tilde{y} = \{y_k\} \in \ell_p\ benar\ bahwa$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \bar{y}_k|\ \leq \|\tilde{x}\|_p . \|\tilde{y}\|_q$$

$$dengan\ \ \ \|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\ \ dan\ \|\tilde{y}\|_q = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Teorema 2.1.4 ***(Ketaksamaan Minkowski)***
Jika $1 \leq p \leq \infty$ *maka untuk setiap* $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\} \in \ell_p$ *benar bahwa*

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

Teorema 2.1.5 *untuk setiap* $1 \leq p \leq \infty$, *maka* ℓ_p *merupakan ruang Banach.*

2.2. Operator Linear dan Kontinu

Operator adalah fungsi linear dan kontinu, oprator ditulis dengan huruf capital: A, B, C … . Fungsi dari suatu ruang bernorma ke ruang bernorma yang haruslah dari dua ruang bernorma atas lapangan yang sama yaitu $\mathbb{C}$ atau $\mathcal{R}$

Definisi 2.2.1 *Diberikan ruang bernorma* X *dan* Y. *fungsi* $f : X \rightarrow Y$ *dikatakan linear, jika* $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, *untuk setiap skalar* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *dan untuk setiap* $x, y \in X$.

Definisi 2.2.2 *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *dan* $(Y, \|.\|)$. *fungsi* $f : X \rightarrow Y$ *dikatakan*

i. Kontinu pada $a \in X$, jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk stiap $x \in X$ dengan $\|a - x\| < \delta$ berakibat
$$\|f(a) - f(x)\| < \varepsilon.$$
ii. Fungsi f dikatakan kontinu pada X jika f kontinu disetiap $x \in X$

Definisi 2.2.3 *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ *dan* $(Y, \|.\|)$. *Fungsi linar* $f : X \rightarrow Y$ *dikatakan* ***terbatas***, *jika terdapat* $M > 0$ *sehingga* $\|f(x)\| \leq M\,\|x\|$, *untuk setiap* $x \in X$.

Teorema 2.2.1 *Diberikan ruang bernorma-ruang bernorma* $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$. *Fungsi* $f : X \to Y$ *kontinu di suatu titik* $a \in X$ *jika dan hanya jika untuk setiap barisan* $\{x_n\} \subset X$ *yang konvergen ke* a *berakibat barisan* $\{f(x_n)\}$ *konvergen ke* $f(a)$.

Teorema 2.2.2 *Diketahui* X *dan* Y *masing-masing ruang bernorma. Jika fungsi* $f : X \to Y$ *fungsi linear, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

a. *Fungsi* f *kontinu pada X*
b. *Fungsi* f *kontinu di* $\theta \in X$
c. *Fungsi* f *kontinu di* $x \in X$
d. *Himpunan* $\{\|f(x)\|: x \in X \; dan \; \|x\| \leq 1\} \; terbatas$
e. *Ada bilangan* $M \geq 0$ *sehingga* $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ *untuk setiap* $x \in X$

Teorema 2.2.3 : Diketahui X ruang bernorma yang lengkap dan $A \subset X$. Diperoleh A tertutup jika dan hanya jika A lengkap.

III. Ruang Barisan Selisih

Sebelum membahas ruang barisan lebih lanjut, diperlihatkan barisan selisih bilangan sebagai berikut:

Jika $\tilde{x} = \{x_k\}$ suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}, \; untuk \; setiap \; k \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut *barisan selisih pertama* terhadap barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$

$\vdots$

$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m x_k\} = \left\{\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i}\right\}$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut *barisan selisih ke-m* terhadap barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan $\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_k\}$, $\Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_k\}$, ... $\{\Delta_m x_k\} = \{\Delta_m x_k\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih $ke - m$.

3.1 Ruang Barisan Selisih $\boldsymbol{c_0}(\Delta_{\boldsymbol{m}})$, $\boldsymbol{c}\,(\Delta_{\boldsymbol{m}})$, $\boldsymbol{\ell}_\infty(\Delta_{\boldsymbol{m}})$ $\boldsymbol{dan}$ $\boldsymbol{\ell_p}(\Delta_{\boldsymbol{m}})$

Teorema 3.1.1 : *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ *merupakan ruang Banach, terhadap norma* $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_\infty$ *dengan* $\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_k\} = \{x_{k+1} - x_k\}$. *Selanjutnya* $c_0(\Delta) \subset c(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta)$

Bukti:

i) $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang linear, sebab:

Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_\infty(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in \ell_\infty$

$$\Leftrightarrow \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k| < \infty \text{ dan } \sup_{k\geq 1} |\Delta y_k| < \infty$$

berakibat

$$\sup_{k\geq 1}|\Delta(x_k + y_k)| = \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k + \Delta y_k| \leq \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k| + |\Delta y_k| \leq \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k| + \sup_{k\geq 1}|\Delta y_k| < \infty$$

Jadi $\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) \in \ell_\infty$ atau $\tilde{x} + \tilde{y} \in \ell_\infty(\Delta)$ (3.1.1.1)
Diambil sebarang α skalar dan $\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta)$
$\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in \ell_\infty \Leftrightarrow \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k| = \sup_{k\geq 1}|x_{k+1} - x_k| < \infty$
Jadi $\Delta\alpha\tilde{x} \in \ell_\infty \Leftrightarrow \sup_{k\geq 1}|\Delta\alpha x_k| = \sup_{k\geq 1} |\alpha||(x_{k+1} - x_k)| = |\alpha| \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k| < \infty$
yang berarti $\alpha\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta)$ (3.1.1.2)

Dari (3.1.1.1) dan (3.1.1.2) terbukti bahwa $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang linear
Selanjutnya $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ ruang linear dan $c_0(\Delta) \subset c(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta)$ sebab:
Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in c_0(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in c_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0 \text{ dan } \lim_{k\to\infty} (y_{k+1} - y_k) = 0$$

Jika $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$, maka $\Delta\tilde{z} = \{z_{k+1} - z_k\}$

$$\lim_{k\to\infty} (z_k - z_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} + y_{k+1}) - (x_k + y_k)$$
$$= \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) + \lim_{k\to\infty} (y_{k+1} - y_k) = 0 + 0 = 0$$

Jadi $\Delta\tilde{z} \in c_0 \Leftrightarrow \tilde{z} \in c_0(\Delta)$

Dengan kata lain $\tilde{x} + \tilde{y} \in c_0(\Delta)$ (3.1.1.3)

Diambil sebarang α skalar dan $\tilde{x} \in c_0(\Delta)$
$\tilde{x} \in c_0(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c_0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$
jadi

$$\Delta\alpha\tilde{x} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (\alpha x_{k+1} - \alpha x_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha (x_{k+1} - x_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = \alpha.0 = 0$$

yang berarti $\alpha\tilde{x} \in c_0(\Delta)$ (3.1.1.4)

Dari (3.1.1.3) dan (3.1.1.4) diperoleh $c_0(\Delta)$ merupakan ruang linear.
selanjutnya $c(\Delta)$ merupakan ruang linear sebab:
Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in c(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in c$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = k \text{ dan } \lim_{k\to\infty} (y_{k+1} - y_k) = l$$

jika $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$, maka $\Delta\tilde{z} = \{z_{k+1} - z_k\}$

$$\lim_{k\to\infty} (z_k - z_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} + y_{k+1}) - (x_k + y_k)$$
$$= \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) + \lim_{k\to\infty} (y_{k+1} - y_k) = k + l \text{ (ada)}$$

Jadi $\Delta\tilde{z} \in c \Leftrightarrow \tilde{z} \in c(\Delta)$

Dengan kata lain $\tilde{x} + \tilde{y} \in c(\Delta)$ (3.1.1.5)

Diambil sebarang α skalar dan $\tilde{x} \in c(\Delta)$
$\tilde{x} \in c(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = k$
jadi $\Delta\alpha\tilde{x} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (\alpha x_{k+1} - \alpha x_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha\, (x_{k+1} - x_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = \alpha.k$
(ada)
yang berarti $\alpha\tilde{x} \in c(\Delta)$ (3.1.1.6)

Dari (3.1.1.5) dan (3.1.1.6) diperoleh $c(\Delta)$ merupakan ruang linear.
Selajutnya $c_0(\Delta) \subset c(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta)$ sebab:
Diambil sebarang $\tilde{x} \in c_0(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c_0 \Longrightarrow \tilde{x} \in c(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c$
Jadi $c_0(\Delta) \subset c(\Delta)$
Selanjutnya diambil sebarang $\tilde{x} \in c(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = k$
dengan demikian $\lim_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k| = |k| \Longrightarrow \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k| < \infty$
Dengan kata lain $\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta)$
Jadi $c(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta)$
ii) a). Selanjutnya dibuktikan $c_0(\Delta)$, $c(\Delta), \ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|.\|_{(\Delta,\infty)}$.

$$\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} = |x_1| + \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k|$$

(N_1) Untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta)$

$$\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_\infty = |x_1| + \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k| \geq 0$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} = 0 &\Leftrightarrow |x_1| + \|\Delta x\|_\infty = |x_1| + \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } \sup_{k\geq 1} |(x_{k+1} - x_k)| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } |(x_{k+1} - x_k)| = 0; \text{ untuk setiap } k \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ dan } |x_2 - x_1| = 0, |x_3 - x_2| = 0, \ldots.. \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \ldots \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \ldots = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

(N_2) Untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta)$ dan α skalar

$$\alpha\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\alpha\tilde{x} \in \ell_\infty$$

$$\begin{aligned} \|\alpha\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} &= |\alpha x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_\infty = |\alpha x_1| + \sup_{k\geq 1} |\Delta\alpha x_k| \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha| \sup_{k\geq 1} |\Delta x_k| = |\alpha|\,|x_1| + |\alpha|\,\|\Delta\tilde{x}\|_\infty \\ &= |\alpha|(|x_1| + \|\Delta x\|_\infty) = |\alpha|\,\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} \end{aligned}$$

(N_3) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_\infty(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in \ell_\infty \Longrightarrow \tilde{x} + \tilde{y} \in \ell_\infty(\Delta)$
berakibat

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta,\infty)} = |x_1 + y_1| + \|\Delta(\tilde{x} + \tilde{y})\|_\infty = |x_1 + y_1| + \sup_{k\geq 1} |\Delta(x_k + y_k)|$$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k| + \sup_{k\geq 1}|\Delta y_k|$$
$$= |x_1| + |y_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_\infty + \|\Delta\tilde{y}\|_\infty$$
$$= (|x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_\infty) + (|y_1| + \|\Delta\tilde{y}\|_\infty) = \|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} + \|\tilde{y}\|_{(\Delta,\infty)}$$

Dari $(N_1), (N_2)$dan (N_3) benar bahwa $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang bernorma. Karena $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ merupakan ruang linear bagian di dalam $\ell_\infty(\Delta)$ maka $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ merupaka ruang bernorma pula.

b). Selanjutnya ditunjukan $\ell_\infty(\Delta)$ lengkap

Diambil sebarang barisan Cauchy $\tilde{x}^{(n)} = \left\{x_k^{(n)}\right\} \subset \ell_\infty(\Delta)$ dengan
$$\tilde{x}^{(n)} = \left\{x_k{}^{(n)}\right\} = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\right\}$$

Jadi, jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ benar bahwa
$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\infty)} < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| + \sup_{k\geq 1}\left|\Delta\left(x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \sup_{k\geq 1}\left|\Delta x_k{}^{(m)} - \Delta x_k{}^{(n)}\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.1.1.7)$$

Hal ini berakibat, berdasarkan (3.1.1.7) untuk setiap $m, n \geq n_0$ benar bahwa:
$$\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } k$$
atau di peroleh untuk setiap k barisan, $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ merupakan barisan (bilangan) Cauchy. Jadi, untuk setiap k barisan $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ konvergen, katakan konvergen ke x_k atau
$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \text{ atau } \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$$

Dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$, mengingat (3.1.1.7) diperoleh
$$\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\infty)} = \left|x_1 - x_1^{(n)}\right| + \sup_{k\geq 1}\left|\Delta\left(x_k - x_k{}^{(n)}\right)\right|$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| + \lim_{m\to\infty}\sup_{k\geq 1}\left|\Delta\left(x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right)\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad (3.1.1.8)$$

jadi barisan $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\tilde{x}$.

Selanjutnya, $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} = \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)} + \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\infty)}$

$$\leq \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\infty)} + \left\|\tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,\infty)} < \infty \qquad (3.1.1.9)$$

Berdasarkan hasil (3.1.1.8) dan (3.1.1.9) disimpulkan bahwa $\tilde{x} = \{x_k\} \in \ell_\infty(\Delta)$
Jadi terbukti barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset \ell_\infty(\Delta)$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in \ell_\infty(\Delta)$
Dengan kata lain terbukti bahwa $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang Banach.

iii) Selanjutnya telah terbukti bahwa $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ merupakan ruang bernorma bagian di dalam $\ell_\infty(\Delta)$ dan telah terbukti $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang Banach, cukup membuktikan $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ tertutup di dalam $\ell_\infty(\Delta)$.
Diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\} \in \ell_\infty(\Delta)$ titik limit $c_0(\Delta)\ (c(\Delta))$ dibuktikan $\tilde{x} \in$ *c0*Δ *c*Δ

Karena $\tilde{x} = \{x_k\}$ titik limit $c_0(\Delta)\ (c(\Delta))$ maka ada barisan $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset c_0(\Delta)\ (c(\Delta))$ yang konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\}$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}^{(n)} = \tilde{x}$$

$$\text{atau } \lim_{n\to\infty} \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\|_{(\Delta,c_0)} = 0$$

yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan n_0 sehingga jika $n \geq n_0$ benar bahwa

$$\left\|\tilde{x}^{(n)} - \tilde{x}\right\|_{(\Delta,c_0)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Untuk setiap $m, n \geq n_0$ hal ini berarti

$$\left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| + \sup_{k\geq1}\left|\Delta\left(x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{maka } \left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \sup_{k\geq1}\left|\Delta\left(x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berakibat $\{\tilde{x}^n\} \subset c_0(\Delta)\ (c(\Delta))$ merupakan barisan Cauchy yang lengkap oleh karena itu $\tilde{x} \in c_0(\Delta)\ (c(\Delta))$
Jadi terbukti bahwa $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ tertutup di dalam $\ell_\infty(\Delta)$.
Jadi bahwa $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ merupakan ruang Banach.
Berdasarka (i),(ii) dan (iii) Teorema 3.1.1 terbukti.■

Teorema 3.1.2 *Jika* $1 \leq p < \infty$ *maka ruang barisan selisih* $\ell_p(\Delta)$ *merupakan ruang Banach, terhadap norma* $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_p$ *dengan* $\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_k\} = \{x_{k+1} - x_k\}$

Bukti:
$i.)$ $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang linear sebab:
Karena $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_p(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in \ell_p$

$$\Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \ dan$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

maka $\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) = \Delta\tilde{x} + \Delta\tilde{y} \in \ell_p \Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k + \Delta y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k) + (y_{k+1} - y_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(y_{k+1} - y_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Jadi $\tilde{x} + \tilde{y} \in \ell_p(\Delta)$ (3.1.2.1)

Untuk setiap α skalar dan $\tilde{x} \in \ell_p(\Delta)$ diperoleh $\alpha\tilde{x} \in \ell_p(\Delta)$ sebab:

$$\Delta(\alpha\tilde{x}) = \{\Delta\alpha x_k\} \Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(x_{k+1} - x_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha||(x_{k+1} - x_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (3.1.2.2)$$

Dari (3.1.2.1) dan (3.1.2.2) terbukti bahwa $\ell_p(\Delta)$ ruang linear

$ii)$ $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_p$ sebab:

(N_1) Untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_p(\Delta)$

$$\Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in \ell_p \Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

$$\|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)} = 0 \quad \Leftrightarrow |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } |x_{k+1} - x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ dan } x_2 - x_1 = 0, \ x_3 - x_2 = 0, \quad x_4 - x_3 = 0, \ldots.$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, \ldots. \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

(N_2) Untuk setiap α skalar dan $\tilde{x} \in \ell_p(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in \ell_p$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|^p < \infty$$

Jadi $\|\alpha\tilde{x}\|_{(\Delta,p)} = |\alpha x_1| + \|\Delta\alpha\tilde{x}\|_p = |\alpha x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(x_{k+1} - x_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= |\alpha||x_1| + |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1} - x_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left(|x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= |\alpha|\big(|x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_p\big) = |\alpha| \, \|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)}.$$

(N_3) Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_p(\Delta) \Leftrightarrow \big(\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in \ell_p\big)$

$$\Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{x}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ dan } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\tilde{y}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Jika $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{(\Delta,p)} = |x_1 + y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k + y_k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + |y_1| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_p + |y_1| + \|\Delta\tilde{y}\|_p = \|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)} + \|\tilde{y}\|_{(\Delta,p)}.$$

Berdasarkan hasil, $(N_1), (N_2)$ dan (N_3) benar bahwa $\ell_p(\Delta)$ ruang bernorma

$iii.)$ $\ell_p(\Delta)$ lengkap sebab:

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset \ell_p(\Delta) \Leftrightarrow \{\Delta\tilde{x}^{(n)}\} \subset \ell_p$ dengan

$$\tilde{x}^{(n)} = \{x_k{}^{(n)}\} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots\}$$

Jadi, jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ benar bahwa

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,p)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{atau} \quad \left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta\left(x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right)\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dan} \quad \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta\left(x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right)\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $m, n \geq n_0$. Hal ini berakibat bahwa:

$\left\{\Delta x_k^{(n)}\right\} = \left\{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right\}$ barisan Cauchy untuk setiap k.

(a) $\Delta x_1^{(n)} = \left\{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\right\} = \left\{x_2^{(n)}\right\} - \left\{x_1^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy

Jadi ada x_1 sehingga $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_1 dan $\left\{x_2^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy

Jadi ada bilangan x_2 sehingga $\left\{x_2^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_2

Hal ini berakibat $\left\{\Delta x_2^{(n)}\right\} = \left\{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\right\}$ konvergen ke $x_2 - x_{1.}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}\right\} = x_2 - x_1$$

(b) $\Delta x_2^{(n)} = \left\{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}\right\} = \left\{x_3^{(n)}\right\} - \left\{x_2^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy. Karena $\left\{x_2^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_2 maka $\left\{x_3^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy.

Jadi ada bilangan x_3 sehingga $\left\{x_3^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_3

Hal ini berakibat $\left\{\Delta x_2^{(n)}\right\} = \left\{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}\right\}$ konvergen ke $x_3 - x_{2.}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_3^{(n)}-x_2^{(n)}\right\}=x_3-x_2.$$

(c) $\left\{\Delta x_3^{(n)}\right\}=\left\{x_4^{(n)}-x_3^{(n)}\right\}=\left\{x_4^{(n)}\right\}-\left\{x_3^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy. Karena barisan $\left\{x_3^{(n)}\right\}$ barisan Cauchy (konvergen ke x_3) maka $\left\{x_4^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy.

Jadi $\left\{x_4^{(n)}\right\}$ konvergen ke suatu bilangan x_4. Hal ini berakibat $\left\{\Delta x_3^{(n)}\right\}=\left\{x_4^{(n)}-x_3^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_4-x_3.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x_4^{(n)}-x_3^{(n)}\right\}=x_4-x_3$$

(d) Selanjutnya dianggap benar $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_k untuk setiap k=1,2,3…m,
Dibuktikan $\left\{x_{m-1}^{(n)}\right\}$ konvergen
maka barisan $\left\{\Delta x_{m-1}^{(n)}\right\}=\left\{x_m^{(n)}-x_{m-1}^{(n)}\right\}=\left\{x_m^{(n)}\right\}-\left\{x_{m-1}^{(n)}\right\}$ barisan Cauchy.

Karena $\left\{x_{m+1}^{(n)}\right\}$ dan $\left\{x_m^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy yang konvergen ke x_{m+1} *dan* x_m , maka $\left\{x_m^{(n)}\right\}$ barisan bilangan Cauchy
jadi ada bilangan x_m sehingga $\left\{x_m^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_m dan ada x_{m-1} sehingga $\left\{x_{m-1}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_{m-1}

Berakibat $\left\{\Delta x_{m-1}^{(n)}\right\}=\left\{x_m^{(n)}-x_{m-1}^{(n)}\right\}$ konvergen ke x_m-x_{m-1} dan diperoleh.
Berdasarkan hasil $(a),(b),(c)$ dan (d) di peroleh.
Barisan $\left\{\Delta x_k^{(n)}\right\}$ konvergen untuk setiap k.

Jadi $\left\{\Delta\tilde{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\Delta\tilde{x}$ dengan $\tilde{x}=\{x_k\}$ (3.1.2.3)

$$\begin{aligned}\|\Delta\tilde{x}\|_{(\Delta,p)}&=\left\|\Delta\tilde{x}-\Delta\tilde{x}^{(n)}+\Delta\tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,p)}\\&\le\left\|\Delta\tilde{x}-\Delta\tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,p)}+\left\|\Delta\tilde{x}^{(n)}\right\|_{(\Delta,p)}<\infty \qquad (3.1.2.4)\end{aligned}$$

Jadi berdasarkan (3.1.2.3)dan (3.1.2.4) terbukti barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\}\subset\ell_p(\Delta)$ konvergen ke $\tilde{x}=\{x_k\}\in\ell_p(\Delta)$
Jadi $\Delta\tilde{x}\in\ell_p$ atau $\tilde{x}\in\ell_p(\Delta)$. Dengan kata lain terbukti bahwa $\ell_p(\Delta)$ lengkap.
Berdasarkan $(i),(ii)$ *dan* (iii) terbukti bahwa $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang Banach. ■

Teorema 3.1.3 : *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta_2)$, $c_0(\Delta_2)$ *dan* $c(\Delta_2)$ *merupakan ruang Banach, terhadap norma* $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,\infty)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2\tilde{x}\|_\infty$ *dan Selanjutnya* $c_0(\Delta_2) \subset c(\Delta_2) \subset \ell_\infty(\Delta_2)$.
$\Delta_2\tilde{x} = \{\Delta x_{k+1} - \Delta x_k\} = \{(x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k)\} = \{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k\}$,

Teorema 3.1.4 *Jika* $1 \leq p < \infty$ *maka ruang barisan selisih* $\ell_p(\Delta_2)$ *merupakan ruang Banach, terhadap norma* $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,\infty)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2\tilde{x}\|_p$ *dengan* $\Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_k\} = \{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k\}$

Teorema 3.1.5 : *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ *dan* $c(\Delta_m)$ *merupakan ruang Banach, terhadap norma* $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_m,\infty)} = \sum_{r=1}^{m}|x_r| + \|\Delta_m\tilde{x}\|_\infty$ *dan Selanjutnya* $c_0(\Delta_m) \subset c(\Delta_m) \subset \ell_\infty(\Delta_m)$.

$$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m x_k\} = \left\{\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i\, x_{k+m-i}\right\}$$

Teorema 3.1.6 *Jika* $1 \leq p < \infty$ *maka ruang barisan selisih* $\ell_p(\Delta_m)$ *merupakan ruang Banach, terhadap norma* $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_m,p)} = \sum_{r=1}^{m}|x_r| + \|\Delta_m x\|_p$ *dengan*

$$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m x_k\} = \left\{\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i\, x_{k+m-i}\right\}$$

Definisi 3.1.1: *Ruang barisan bernorma* X *disebut* ***ruang-BK*** *jika* X *ruang Banach dan untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$, *pemetaan koordinat* $P_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dengan,* $P_n(\tilde{x}) = x_n$, *kontinu, dengan* $\tilde{x} = \{x_k\}$.

Teorema 3.1.7 Ruang barisan $\ell_\infty(\Delta)$, $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ dan $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang-BK

Bukti:
(i) Ditunjukkan ruang barisan $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(a). Berdasarkan Teorema 3.1.1 $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang Banach.
(b). Ditunjukan $P_n : \ell_\infty(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $P_n(\tilde{x}) = x_n$ kontinu.
Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_\infty(\Delta)$ dan diambil $n \in \mathbb{N}$; berlaku

$$|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| = |x_n - y_n| \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_\infty.$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan jika $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_\infty < \delta$, maka berakibat $|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| < \varepsilon$.
Jadi P_n kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Berdasarkan (a) dan (b) $\ell_\infty(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(ii) Ditunjukkan ruang barisan $c_0(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(a). Berdasarkan Teorema 3.1.1 $c_0(\Delta)$ merupakan ruang Banach.

(b) Dibuktikan $P_n : c_0(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $P_n(\tilde{x}) = x_n$ kontinu

Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in c_0(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y} \in c_0$ dan diambil $n \in \mathbb{N}$; maka

$$|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| = |x_n - y_n| \le \|x_n - y_n\|$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan jika $\|x_n - y_n\| < \delta$, maka berakibat $|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| < \varepsilon$.

Jadi P_n kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan (a) dan (b) $c_0(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(iii) Ditunjukkan ruang barisan $c(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(a) Berdasarkan Teorema 3.1.1 $c(\Delta)$ merupakan ruang Banach.

(b) Dibuktikan $P_n : c(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $P_n(\tilde{x}) = x_n$ kontinu.

Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in c(\Delta)$ dan diambil $n \in \mathbb{N}$; maka

$$|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| = |x_n - y_n| \le \|x_n - y_n\|.$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan jika $\|x_n - y_n\| < \delta$, maka berakibat $|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| < \varepsilon$.

Jadi P_n kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan (a) dan (b) $c(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(iv) Ditunjukkan ruang barisan $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

(a) Berdasarkan Teorema 3.1.2. $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang Banach.

(b) Dibuktikan $P_n : \ell_p(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan $P_n(\tilde{x}) = x_n$ kontinu.

Untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_p(\Delta)$ dan diambil $n \in \mathbb{N}$; berlaku

$$|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| = |x_n - y_n| \le \|x_n - y_n\|_p.$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan jika $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_p < \delta$, maka berakibat $|P_n(\tilde{x}) - P_n(\tilde{y})| < \varepsilon$.

Jadi P_n kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan (a) dan (b) $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang-BK.

Dengan kata lain (i), (ii), (iii) dan (iv) teorema 3.17 terbukti.■

Teorema 3.1.8 *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta_2)$, $c_0(\Delta_2)$, $c(\Delta_2)$ *dan* $\ell_p(\Delta_2)$ *merupakan ruang-BK*

Teorema 3.1.9 *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta_m), c_0(\Delta_m), c(\Delta_m)$ *dan* $\ell_p(\Delta_m)$ *merupakan ruang-BK*

Definisi 3.1.2: *Ruang barisan* E *dikatakan* ***solid*** *(normal) jika* $\{x_k\} \in E$ *maka* $\{\alpha_k x_k\} \in E$ *untuk sebarang barisan skalar dengan* $|\alpha_k| \le 1$ *utuk setiap* $k \in N$

Teorema 3.1.10 *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta),\ c_0(\Delta),\ c(\Delta)\ dan\ \ell_p(\Delta)\ solid$

Bukti:

i). $\ell_\infty(\Delta)$ solid sebab

$$\tilde{x} \in \ell_\infty(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in \ell_\infty \Leftrightarrow \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k| < \infty.$$

Untuk sebarang barisan bilangan $\{\alpha_k\}$ dengan $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap k diperoleh barisan $\{\alpha_k x_k\}$ dengan sifat

$$\sup_{k\geq 1}|\alpha_k \Delta x_k| \leq \sup_{k\geq 1}|\alpha_k||\Delta x_k| \leq \sup_{k\geq 1}|\Delta x_k| < \infty .$$

Dengan kata lain $\{\alpha_k x_k\} \in \ell_\infty(\Delta)$ atau $\ell_\infty(\Delta)$ solid.

ii). $c_0(\Delta)$ solid sebab

$$\tilde{x} \in c_0(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c_0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - x_k) = 0$$

Untuk sebarang barisan skalar $\{\alpha_k\}$ dengan $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap k diperoleh barisan $\{\alpha_k x_k\}$ dengan sifat

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k \Delta x_k) = \lim_{k\to\infty}(\alpha_k x_{k+1} - \alpha_k x_k) = \lim_{k\to\infty}(\alpha_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$= (\alpha_k)\lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - x_k) = (\alpha_k).0 = 0.$$

Dengan kata lain $\{\alpha_k x_k\} \in c_0(\Delta)$ atau $c_0(\Delta)$ solid.

iii). $c(\Delta)$ solid sebab

$$\tilde{x} \in c(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in c \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - x_k) = p.$$

Untuk sebarang barisan skalar $\{\alpha_k\}$ dengan $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap k diperoleh barisan $\{\alpha_k x_k\}$ dengan sifat

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k \Delta x_k) = \lim_{k\to\infty}(\alpha_k x_{k+1} - \alpha_k x_k) = \lim_{k\to\infty}(\alpha_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$= (\alpha_k)\lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - x_k) = (\alpha_k).p\ (\,ada).$$

Dengan kata lain $\{\alpha_k x_k\} \in c(\Delta)$ atau $c(\Delta)$ solid.

iv). $\ell_P(\Delta)$ solid sebab

$$\tilde{x} \in \ell_p(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\tilde{x} \in \ell_p \Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Jadi untuk sebarang barisan skalar $\{\alpha_k\}$ dengan $|\alpha_k| \leq 1$ untuk setiap k diperoleh barisan $\{\alpha_k x_k\}$ dengan sifat

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\ |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\ |\Delta x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dengan kata lain $\{\alpha_k x_k\} \in \ell_p(\Delta)$ atau $\ell_p(\Delta)$ solid.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) teorema terbukti. ■

Teorema 3.1.11 *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta_2),\ c_0(\Delta_2),\ c(\Delta_2)\ dan\ \ell_p(\Delta_2)$ *solid*

Teorema 3.1.12 *Ruang barisan* $\ell_\infty(\Delta_m),\ c_0(\Delta_m),\ c(\Delta_m)\ dan\ \ell_p(\Delta_m)$ *solid*

3.2 Oprator Linear dan Kontinu

Teorema 3.2.1: *Operator* $A : \ell_1 \longrightarrow \ell_\infty$ *bersifat linear dan kontinu jika dan hanya jika ada matriks* (α_{ij}) *dengan* $\|\alpha_{ij}\| = \sup_{i=1} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ \right|$ *dan* $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty ,\forall\ \tilde{x} \in \ell_1$

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui A linear dan kontinu
Ditunjukan (α_{ij}) dan $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty$
Diambil sebarang barisan $\tilde{x} \in \ell_1$ dan $\tilde{e}_j$ merupakan basis dari ℓ_1. Sehingga untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_1$ dapat ditulis juga sebagai

$$\tilde{x} = \{x_1, x_2,\ x_3, \dots\} = \{x_1, 0, 0, 0, \dots\} + \{0, x_2, 0, 0, 0, \dots\} + \{0, 0, x_3, 0, 0, 0, \dots\} + \ \dots$$

$$= x_1\tilde{e}_1 + x_2\tilde{e}_2 + x_3\tilde{e}_3 + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\,\tilde{e}_j$$

dengan $\tilde{e}_j$ adalah barisan bilangan real yang unsur ke-j sama dengan 1 dan semua unsur yang lainnya sama dengan 0; jadi

$$\tilde{e}_j = (0,0,0, \dots ,0,1,0 \dots 0,0,0, \dots).$$

Karena A linear dan kontinu, maka diperoleh

$$A(\tilde{x}) = A\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \tilde{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\ A(\tilde{e}_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\ \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\ x_j\ \tilde{e}_j$$

$$\text{dengan } A(\tilde{e}_j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\ \tilde{e}_j \quad \text{dan } \sup_{i\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ x_j\right| \leq \sup_{i\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| \|\tilde{x}\|_1 < \infty.$$

Dengan kata lain terbukti bahwa ada matrik (α_{ij}) dengan $\sup\limits_{i=1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ \right| < \infty$ dan $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty$ untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_1$.

($\Longleftarrow$) Diketahui matriks (α_{ij}) dengan $\sup\limits_{i=1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ \right| < \infty$ dan $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty$ untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_{1.}$

Ditujukan A bersifat linear dan kontinu.

(i) A bersifat linear sebab:

Untuk sebarang $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_1$ dan untuk setiap α dan β skalar berlaku

$$\|A(\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y})\|_\infty = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ (\alpha\ x_j + \beta\ y_j)\right\|_\infty \leq \sup_{i\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ (\alpha\ x_j + \beta\ y_j)\right|$$

$$\leq |\alpha| \sup_{i\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right| + |\beta| \sup_{i\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ y_j\right| = |\alpha|\ \|A\tilde{x}\|_\infty + |\beta|\ \|A\tilde{y}\|_\infty.$$

Jadi A bersifat linear.

(ii) Selanjutnya diketahui $\sup\limits_{i=1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ \right| < \infty$.

Dutujukan A bersifat terbatas.

Menurut yang diketahui diperoleh

$$\|A\tilde{x}\|_\infty = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j\ \right\|_\infty = \sup_{i=1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ x_j\ \right| \leq \sup_{i=1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ \right| . \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j\ |^1\right\}^{\frac{1}{1}}$$

$$= \|A\|\,\|\tilde{x}\|_1 < \infty, \quad \text{dengan} \quad \|A\| = \sup_{i=1} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| < \infty.$$

Dengan kata lain A terbatas atau oprator A kontinu.

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa oprator A adalah suatu oprator linear dan kontinu. ■

Teorema 3.2.2 : *Oprator* $A : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ *dengan* $1 < p, q < \infty$ *dengan q konjugat p bersifat linear dan kontinu jika dan hanya jika ada matriks tak berhingga* (α_{ij}) *dengan* $\|\alpha_{ij}\| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q < \infty$ *dan* $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\, x_j\right\} \in \ell_p$, *untuk setiap* $\tilde{x} \in \ell_p$

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui A linear dan kontinu.

Ditunjukan ada (α_{ij}) dengan $\|\alpha_{ij}\| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q < \infty$.

Diambil sebarang barisan $\tilde{x} \in \ell_p$ dengan $1 < p, q < \infty$. Karena ℓ_p dan ℓ_q (q konjugat p dan $1 < p, q < \infty$) masing-masing ruang barisan maka oprator linear A dengan matriks tak berhingga (α_{ij}) dan

$$A(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} & \cdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{1j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{2j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{3j}\, x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Dengan ketaksamaan Holder diperoleh dengan $1 < p, q < \infty$ dengan q konjugat p

$$\|A(\tilde{x})\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\, x_j \right\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\, x_j \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \right]^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \|\tilde{x}\|_p$$

$$= \|A\|_q\, \|\tilde{x}\|_p \quad \text{dengan} \quad \|A\|_q = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

Dengan kata lain terbukti bahwa ada (α_{ij}) dan $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q < \infty$.

($\Leftarrow$) Diketahui (α_{ij}) dan $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q < \infty$

Ditunjukan A bersifat linear dan kontinu

(i) Oprator A bersifat linear sebab:

Diambil untuk setiap $\tilde{x}, \tilde{y} \in \ell_p$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ maka berlaku

$$\|A\,(\tilde{x})\|_q = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ x_j\right\| = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ x_j\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\|A(\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y})\|_q = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\left(\alpha x_j + \beta y_j\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ \alpha x_j + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\,\beta y_j\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq |\alpha|\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ x_j\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} + |\beta|\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ x_j\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= |\alpha|\ \|A\,\tilde{x}\|_q + |\beta|\ \|A\,\tilde{x}\|_q.$$

Jadi A linear. (3.2.2.1)

(ii) Selanjutnya diketahui $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q < \infty.$

Ditujukan A terbatas.

Menurut yang diketahui berakibat

$$\|A(\,\tilde{x})\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ x_j\right\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\ x_j\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\,x_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right]^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|A\|\ \|\tilde{x}\|_1 < \infty, \qquad \text{dengan } \|A\| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q < \infty.$$

Jadi terbukti A terbatas atau A kontinu. (3.2.2.2)

Dari (3.2.2.1) dan (3.2.2.2) terbukti bahwa A bersifat linear dan kontinu.■

Teorema 3.2.3: *Oprator* $A : \ell_1(\Delta_m) \longrightarrow \ell_\infty(\Delta_m)$ *bersifat linear dan kontunu jika dan hanya jika ada matrik* (α_{ij}) *dengan* $\|\alpha_{ij}\| = \sup\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right|$ *dan* $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty(\Delta_m),\ \forall\ \tilde{x} \in \ell_1(\Delta_m)$.

Teorema 3.2.4 : *Oprator* $A : \ell_p(\Delta_m) \longrightarrow \ell_q(\Delta_m)$ *dengan* $1 < p, q < \infty$ *dengan* $q\ konjugat\ p$ *bersifat linear jika dan hanya jika ada matriks takberhingga* (α_{ij}) *dengan* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_{ij}\right|^q < \infty$ *dan* $(\alpha_{ij})\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_p(\Delta_m)\ \forall\ \tilde{x} \in \ell_p(\Delta_m)$

IV. Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan bab sebelumnya, maka pada bagian ini bahwa $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ dan $\ell_p(\Delta_m)$ dengan $m \in \mathbb{N}$ dan operator linear dan kontinu dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ dan $c(\Delta)$ merupakan ruang Banach.
2. Telah dibuktikan bahwa $\ell_p(\Delta)(1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang Banach.
3. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta)$, $c_0(\Delta), c(\Delta)$ dan $\ell_p(\Delta)(1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang-BK (Banach Kontinu).
4. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta)$, $c_0(\Delta), c(\Delta)$ dan $\ell_p(\Delta)(1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang solid (normal).
5. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta_2)$, $c_0(\Delta_2)$ dan $c(\Delta_2)$ merupakan ruang Banach.
6. Telah dibuktikan bahwa $\ell_p(\Delta_2)\ (1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang Banach.
7. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta_2)$, $c_0(\Delta_2)$, $c(\Delta_2)$ dan $\ell_p(\Delta_2)\ (1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang-BK (Banach Kontinu).
8. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta_2)$, $c_0(\Delta_2)$, $c(\Delta_2)$ dan $\ell_p(\Delta_2)(1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang Solid (normal).
9. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$ dan $c(\Delta_m)$ dengan $m \in \mathbb{N}$ merupakan ruang Banach.
10. Telah dibuktikan bahwa $\ell_p(\Delta_m)(1 \le p \le \infty)$ dengan $m \in \mathbb{N}$ merupakan ruang Banach.
11. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ dan $\ell_p(\Delta_m)(1 \le p \le \infty)$ dengan $m \in \mathbb{N}$, merupakan ruang-BK (Banach Kontinu).
12. Telah dibuktikan bahwa $\ell_\infty(\Delta_m)$, $c_0(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$ dan $\ell_p(\Delta_m)(1 \le p \le \infty)$ dengan $m \in \mathbb{N}$, merupakan ruang Solid (normal).
13. Operator $A : \ell_1 \longrightarrow \ell_\infty$ bersifat linear dan kontinu jika dan hanya jika ada matrik (α_{ij}) dengan $\|A\| = \sup_{i=1}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right|$ dan $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty, \forall \tilde{x} \in \ell_1$.
14. Oprator $A : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ dengan $1 < p, q < \infty$ dengan q konjugat p bersifat linear jika dan hanya jika ada matriks tak berhingga (α_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_{ij}\right|^q < \infty$ dan $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_p$, untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_p$.

15. Oprator $A : \ell_1(\Delta_m) \longrightarrow \ell_\infty(\Delta_m)$ bersifat linear dan kontinu jika dan hanya jika ada matriks (α_{ij}) dengan $\|A\| = \sup \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right|$ dan $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_\infty(\Delta_m)$ untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_1(\Delta_m)$.
16. Oprator $A : \ell_p(\Delta_m) \longrightarrow \ell_q(\Delta_m)$, dengan $1 < p, q < \infty$ dengan q konjugat p, bersifat linear jika dan hanya jika ada matriks tak berhingga (α_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q < \infty$ dan $A\tilde{x} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ x_j\right\} \in \ell_p(\Delta_m)$ untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_p(\Delta_m)$.

Referensi

[1]. Alsaedi, R. S., Bataineh, A. H. A., "*On a Generalized Difference Sequence Spaces Defined by a Sequence of Orlicz Functions",* International Mathematical Forum (2007), 167 – 177.

[2]. Berberian, S. K., "*Itroduction to Hilbert Spaces*",Oxford University Press, New York (1961).

[3]. Darmawijaya, S., "*Analisis Abstrak*", FMIPA UGM, Yogyakarta (2007).

[4]. Et, M., Ayhan, E., *"On Köthe-Toeplitz Duals of Generalized Difference Sequence Spaces",* Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society (2000), 25-32.

[5]. Et, M., Colak, R., "*On A New Type Of Generalized Difference Cesa'ro Sequences Spaces",* Soochow Journal Of Mathematics (1995), 377-386.

[6]. Et, M., Colak, R., *"On Some Difference Sequence Sets and Their Topological Properties",* Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society (2005), 125-130.

[7]. Hu, Sze-Tsen, "*Real Analysis*" Holden-Day, Inc., San Francisco (1967).

[8]. Khamthan, P.K., Gupta, M.,"*Sequences Spaces and Series*", Marcel Dekker INC., New York and Basel (1981).

[9]. Kreyszig, E., "*Introductory Fungtional Analysis With Applications*", Jhon Wiley&Sons, New York (1978).

[10]. Niamsup, P., Lenbury Y., "*M_r-Faktors and Q_r-Faktors For Near Quasinorm on Centrain Sequence Spaces",* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2005), 2441–2446.

[11].Tripathy, B.C., " *A New Type Of Difference Sequence Spaces",* International Journal of Science & Technology (2006), 11-14.

[12]. Tripathy, B.C., *"On A New Type Of Generalized Difference Cesa'ro Sequences"* Soochow Journal Of Mathematics (2005), 333-340.

[13]. Tripathy, B.C., Sarma, B., "*Some Classes of Difference Paranormed Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions",* Thai Journal of Mathematics (2005), 209-218.

[14]. Royden, H.L, "*Real Analysis*", Macmillan Pub. Co., New York, Collier Macmillan Pub., London (1989).

[15]. Wilansky, A., "*Summability through Functional Analysis*", North-Holand, Amsterdam (1984).