RELASI REKURENSI

Heru Kurniawan
Program Studi Pendidikan Matematika
Jalan KHA. Dahlan 3 Purworejo

Abstrak

Relasi Rekurensi merupakan salah satu masalah dalam Matematika Diskrit. Sebuah relasi rekurensi mendefinisikan suku ke-n dari sebuah barisan secara tak langsung; untuk menghitung a_n, pertama-tama harus dihitung a_0, a_1, a_3..., a_{n-1}. Untuk mendapatkan suatu persamaan yang unik, maka suatu relasi rekurensi harus ditentukan oleh suatu kondisi awal tertentu. Salah satu permasalahan yang melibatkan relasi rekurensi adalah masalah Tower of Hanoi. Relasi rekurensi juga akan membahas penyelesaian umum yang melibatkan persamaan linier homogen dengan koefisien konstan yang melibatkan persamaan karakteristik dengan 2 akar, yaitu (1) r_1, r_2 dua bilangan riil yang berbeda. (2) r_1, r_2 dua bilangan kompleks. (3) r_1, r_2 dua bilangan riil yang sama.

Kata Kunci: Relasi Rekurensi, Menara Hanoi, Persamaan Linier Homogen

Pendahuluan

Dalam matematika diskrit yang melibatkan masalah perhitungan (*Counting Problem*) telah dikenalkan penyelesaian dengan menggunakan Prinsip penjumlahan dan perkalian, Permutasi, atau Kombinasi. Salah satu *Counting Problem* disajikan sebagai berikut. Seorang ilmuwan di dalam laboratorium melakukan sebuah eksperimen mengenai pertumbuhan suatu bakteri. Dalam suatu koloni, bakteri dapat berkembang dua kali lipat dalam setiap 4 jam. Jika bakteri pada awal penelitian berjumlah *n* bakteri, maka berapa jumlah bakteri pada saat *t* jam? Jika permasalahan tersebut diselesaikan dengan menggunakan teknik penyelesaian di atas (Prinsip penjumlahan dan perkalian, Permutasi, atau Kombinasi), maka permasalahan tersebut tidak dapat diselesaikan. Teknik penyelesaian yang dapat digunakan adalah *Prinsip Relasi Rekurensi*.

Definisi1

Sebuah relasi rekurensi untuk barisan a_0, a_1, a_2, …,a_{n-1}. Adalah suatu persamaan yang menghubungkan a_n dengan suku-suku sebelumnya.

Suatu deretan disebut sebagai jawaban dari relasi rekurensi jika suku-sukunya memenuhi relasi rekurensi. Dengan kata lain, relasi rekurensi mirip dengan deretan yang didefinisikan secara rekursif, tetapi tanpa menyebutkan nilai (kondisi) awalnya. Maka, relasi rekurensi bisa (dan biasanya) memiliki jawaban ganda (*multiple solution*). Jika kondisi awal dan relasi rekurensi disebutkan dua-duanya, maka deretan dapat ditentukan secara unik (tunggal). Sebagai penjelasan dari paparan tersebut perlu diperhatikan contoh berikut ini.

Misal diberikan suatu deret geometri 5, 15, 45, 135, ... Sebagaimana dalam deret geometri akan *dapat* dicari suku tertentu dari deret tersebut dengan menggunakan rumus yang telah familiar. Tetapi dalam hal ini akan dicari dengan menggunakan relasi rekurensi. Langkah pertama adalah mencari rasio (*common ratio*). Dari permasalahan di atas dengan mudah akan diperoleh 3 sebagai rasio. Sehingga akan didapatkan relasi rekurensi $a_{n+1} = 3_n$ dengan $n \geq 0$. Tetapi relasi rekurensi tersebut tidaklah mendefinisikan suatu deret geometri yang unik (tunggal). Dimisalkan saja 7, 21, 63, 189, ... juga akan menunjukkan relasi tersebut. Oleh karena itu harus ditentukan suatu bentuk tertentu sehingga relasi tersebut mengacu/ menunjuk pada deret yang unik. Oleh karena itu pembatasan yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut $a_{n+1} = 3_n$ dengan $n \geq 0$ dan $a_0 = 5$. Dengan pembatasan tersebut jelas akan munujuk suatu deret tertentu, yaitu 5, 15, 45, 135, ... Selanjutnya $a_{n+1} = 3_n$ dengan $n \geq 0$ disebut sebagai suatu relasi rekurensi karena nilai dari a_{n+1} tergantung dari nilai a_n.

Sekarang akan dipelajari lebih lanjut dari deret yang telah ditentukan di depan, yaitu $a_{n+1} = 3_n$ dengan $n \geq 0$ dan $a_0 = 5$. Kita akan menderetkan (iterasi) relasi rekurensi di atas, sehingga diperoleh:

$a_0 \quad = 5$

$a_1 \quad = 3\,(a_0) = 3(5)$

$a_2 \quad = 3\,a_1 = 3(3\,a_0) = 3^2\,(a_0) = 3^2(5)$

$a_3 \quad = 3\,a_2 = 3(3^2\,a_0) = 3^3\,(a_0) = 3^3(5)$

$\quad \ldots$

$a_n \quad = 3^n\,(5)$ dengan $n \geq 0$

Bentuk terakhir merupakan penyelesaian umum dari relasi rekurensi yang telah ditentukan di atas. Dengan penyelesaian umum ini, jika akan dicari suku ke 10, dengan mudah akan diperoleh $a_{10} = 3^{10}(5)=$ 295.245.

Contoh 1.

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_2 = 98$

Penyelesaian

Untuk n = 1 maka $\quad a_1 = 7\,a_0$

$a_2 = 7\,a_1 = 7\,(7\,a_0) = 7^2\,a_0$

dari $a_2 = 98$ maka $\quad 98 = 49\,a_0$

sehingga diperoleh $a_0 = 2$. Jika relasi rekurensi tersebut dideretkan terus akan diperoleh

$a_3 = 7\,a_2 = 7\,(7^2\,a_0) = 7^3\,a_0$ ....dan seterusnya

sehingga penyelesaian umum dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n = 7^n\,(2)$, $n \geq 0$

Contoh 2.

Seseorang menginvestasikan \$1.000 dengan bungan tahunan 12%. Jika A_n adalah jumlah yang diperoleh pada akhir athun ke-n, tentukan hubungan antara A_n dan A_{n-1}.

Penyelesaian

$A_0 = 1.000$

$A_1 = 1.000 + 12\%\,(1.000)$

$\quad = A_0 + 0{,}12A_0$

$\quad = 1{,}12\,A_0 = 1{,}12\,(1.000)$

$A_2 = A_1 + 12\%\,(A_1)$

$\quad = 1{,}12\,A_0 + 0{,}12\,(1{,}12\,A_0)$

$\quad = 1{,}12\,A_0\,(1 + 0{,}12)$

$\quad = 1{,}12\,A_0\,(1{,}12)$

$\quad = 1{,}12^2\,A_0 = 1{,}12^2\,(1.000)$

$A_3 = A_2 + 12\%\,(A_2)$

$\quad = 1{,}12^2\,A_0 + 0{,}12^2\,(1{,}12\,A_0)$

$\quad = 1{,}12^2\,A_0\,(1 + 0{,}12)$

$\quad = 1{,}12^2\,A_0\,(1{,}12)$

$\quad = 1{,}12^2\,A_0 = 1{,}12^2\,(1.000)$

Dan seterusnya, sehingga $A_n = 1{,}12^n\,(1.000)$, $n \geq 0$

Contoh 3.

Diketahui relasi rekurensi $S_n = 2S_{n-1}$ dengan syarat awal $S_0 = 1$. Selesaikan untuk suku ke-n!

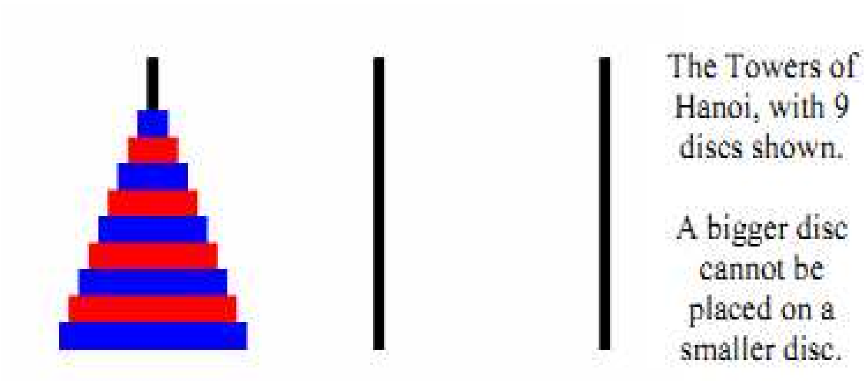
Penyelesaian

Dengan iterasi diperoleh:

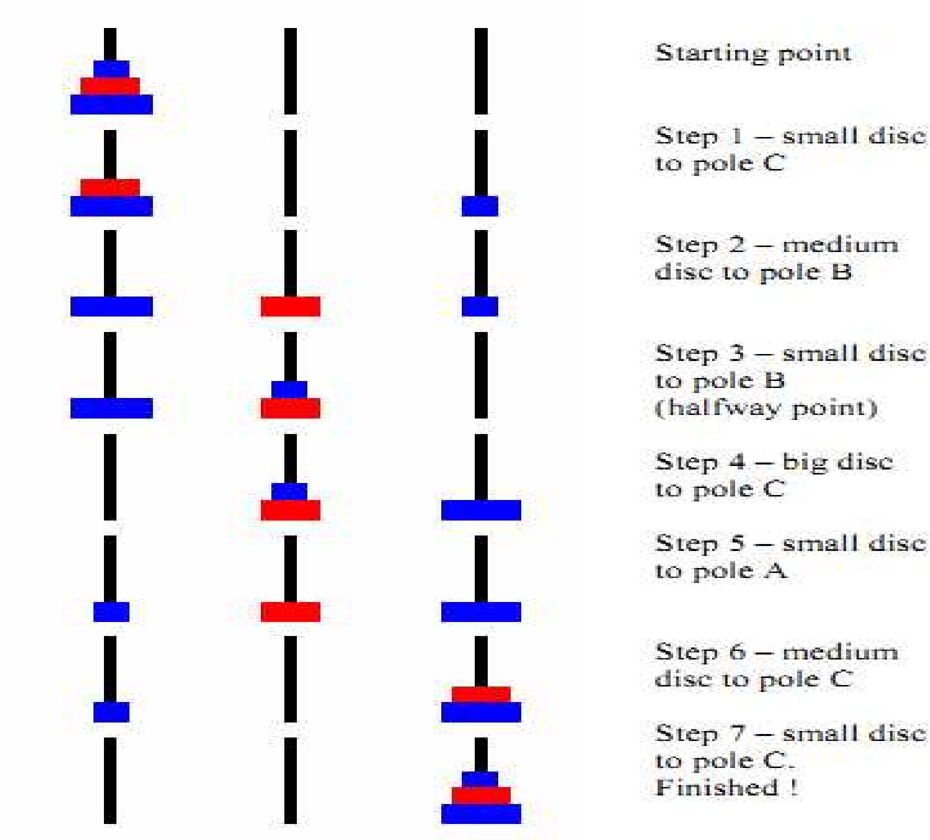
$$\begin{aligned} S_n &= 2S_{n-1} \\ &= 2\,(2S_{n-2}) = 2^2\,S_{n-2} \\ &= 2^3\,S_{n-3} \\ &= \ldots\ldots\ldots \\ &= 2^n\,S_0 \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Menara Hanoi (*Tower of Hanoi*)

Menara Hanoi adalah sebuah puzzle yang memuat tiga tiang yang dilekatkan pada sebuah papan dan *n* disk (keping) dalam berbagai ukuran dengan lubang ditengahnya. Diasumsikan bahwa jika semua disk dimasukkan ke dalam salah satu tiang saja, maka disk dengan diameter lebih kecil selalu berada di atas disk dengan diameter lebih besar.Permasalahannya adalah, dengan berapa cara dapat dipindahkan n disk dari tiang pertama ke tiang lain jika harus dipindahkan disk per disk (satu-satu) dan disk dengan diameter lebih kecil harus selalu berada di atas disk dengan diameter lebih besar?



Gambar 1. Permasalahan Menara Hanoi



Gambar 2. Langkah Penyelesaian Masalah Hanoi

Tabel 1. Tabel kerja penyelesaian

Jumlah Keping	**Gerakan Keping 1**	**Gerakan Keping 2**	**Gerakan Keping 3**	**Gerakan Keping 4**	**….**	**Jumlah gerakan**
1	1					1
2	1 + 1	1				3
3	1 + 1 + 1 + 1	1 + 1	1			7
4	1+1+1+1+1+1+1+1	1+1+1+1	1+1	1		15
…						

Tabel 2. Lanjutan tabel 1

Jumlah Keping	**Gerakan Keping 1**	**Gerakan Keping 2**	**Gerakan Keping 3**	**Gerakan Keping 4**	**….**	**Jumlah gerakan**
1	1					1
2	2	1				3
3	4	2	1			7
4	8	4	2	1		15
…						

Tabel 3. Lanjutan tabel 2

Jumlah Keping	**Gerakan Keping 1**	**Gerakan Keping 2**	**Gerakan Keping 3**	**Gerakan Keping 4**	**….**	**Jumlah gerakan**
1	$1 = 2^0$					1
2	$2 = 2^1$	$1 = 2^0$				3
3	$4 = 2^2$	$2 = 2^1$	$1 = 2^0$			7
4	$8 = 2^3$	$4 = 2^2$	$2 = 2^1$	$1= 2^0$		15
…						
N	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	-------	2^0	

untuk n keping diperoleh $2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 4 + 2 + 1$. Selanjutnya dengan Prinsip Induksi Matematika dapat ditunjukkan bahwa untuk n keping banyak cara yang dipakai adalah $2^n – 1$

Relasi Rekurensi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

A. Order dari suatu relasi rekurensi

Sebelumnya telah dibahas mengenai langkah mencari solusi umum dari suatu persamaan relasi rekurensi. Pada umumnya, lebih dipilih rumus eksplisit untuk menghitung a_n, daripada melakukan iterasi. Formula tersebut bisa diperoleh dengan cara yang sistematis untuk satu jenis relasi rekurensi, Yaitu relasi rekurensi yang menyatakan suatu suku di dalam deretan sebagai kombinasi linier dari suku-suku sebelumnya.

Definisi 2.

Relasi rekurensi homogen derajat k dengan koefisien konstan adalah relasi rekursi berbentuk : $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$. Dimana $c_1, c_2, ..., c_k$ merupakan bilangan riil dan $c_k \neq 0$.

Deretan yang memenuhi relasi rekursi yang demikian dapat ditentukan secara unik dengan relasi rekursi dan k buah kondisi awal. $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$, ...$a_{k-1}= C_{k-1}$.

Definisi 3.

The order of a recurrence relation is the difference between the greatest and lowest subscripts of the terms of the sequence in the equation.

Definisi 4.

A recurrence relation of order k is said to be linier if it is linier in a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …., a_{n-k}. Otherwise, the recurrence relation is said be non-linier.

Contoh :

1. $a_{n+1} = 5a_n$ adalah relasi rekurensi linier homogen berderajat satu
2. $a^4_{n+1} + a^5_n = n$ adalah relasi rekurensi non-linier berderajat satu.
3. Relasi rekursi $P_n = (1.05)\ P_{n-1}$ adalah relasi rekurensi linier homogen ber-derajat satu
4. Relasi rekursi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ adalah relasi rekurensi linier homogen ber-derajat dua
5. Relasi $a_n = a_{n-5}$ adalah relasi rekurensi linier homogen ber-derajat lima

B. Menyelesaikan relasi rekurensi linier homogen

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai cara menyelesaikan relasi rekurensi homogen, perhatikan contoh sederhana berikut. Jika diberikan suatu deret 4, 12, 36, 108, ... Maka dengan mudah dapat ditentukan relasi rekurensi, yaitu $a_{n+1} = 4a_n$, dengan $a_0 = 4$ dan $n > 0$. Penyelesaian umum dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n = 4(3^n)$.

Selanjutnya jika rasio dari deret yang demikian diganti dengan suatu konstanta r dan suku a_0 diganti dengan konstanta c, maka akan didapatkan penyelesaian umum sebagai berikut: $a_n = c(r^n)$, dimana $c \neq 0$ dan $r \neq 0$. Selanjutnya jika penyelesaian umum tersebut disubstitusikan ke suatu relasi rekurensi $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0$ akan didapatkan $c_n r^n + c_{n-1}r^{n-1} + c_{n-2}r^{n-2} = 0$ dengan $c \neq 0$ dan $r \neq 0$. Jika Persamaan tersebut dibagi dengan r^{n-2} akan menjadi : $c_n r^2 + c_{n-1}r + c_{n-2} = 0$. Bentuk terakhir merupakan bentuk persamaan kuadrat, yang selanjutnya akan disebut sebagai persamaan karakteristik.

Dalam bentuk persamaan kuadrat tentu lebih familiar dan mudah diterima jika persamaan tersebut akan memiliki 2 akar, misal r_1 dan r_2. Selanjutnya kedua akar ini akan memenuhi kondisi sebagai berikut: (1) r_1, r_2 dua bilangan riil yang berbeda. (2) r_1, r_2 dua bilangan kompleks. (3) r_1, r_2 dua bilangan riil yang sama. Untuk semua kondisi tersebut selanjutnya r_1 dan r_2 akan disebut akar-akar karakteristik.

1. r_1, r_2 dua bilangan riil yang berbeda.

Misalkan k_1 dan k_2 adalah suatu bilangan riil. Jika $r^2 - k_1 r - k_2 = 0$ mempunyai dua akar berbeda r_1 dan r_2, maka deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi $a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ untuk n = 0, 1, 2, 3, ... dimana c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta.

Contoh 4.

Tentukan jawaban dari relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dengan $a_0 = 2$ dan $a_1 = 7$?

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi tersebut adalah $r_2 - r - 2 = 0$. Dengan akar-akar $r = 2$ dan $r = -1$. Maka, deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi jika dan hanya jika $a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$. Dengan persamaan $a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$ dan syarat awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 7$, diperoleh:

$$a_0 = 2 = c_1 + c_2$$
$$a_1 = 7 = 2c_1 - c_2$$

Dengan eliminasi didapatkan $c_1 = 3$ dan $c_1 = -1$. Jadi penyelesaian umum dari dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.

Contoh 5.

Berikan rumus eksplisit bilangan fibonacci!

Penyelesaian

Bilangan Fibonacci memenuhi relasi rekurensi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dengan starat awal $f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$.

Persamaan karakteristiknya adalah $r^2 - r - 1 = 0$ dengan akar-akar

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Sehingga deret Fibonacci diberikan oleh:

$$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dengan syarat awal $f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$, diperoleh:

$f_0 = 0 = c_1 + c_2$

$f_1 = 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Solusi unik (tunggal) dari sistem persamaan ini adalah $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dan

$c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Akhirnya didapatkan rumus eksplisit dari Deret Fibonacci adalah

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2. **r_1, r_2 dua bilangan riil yang sama.**

Misalkan k_1 dan k_2 adalah suatu bilangan riil dimana $k_2 \neq 0$. Jika $r^2 - k_1 r - k_2 = 0$ hanya mempunyai satu akar r, maka deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi $a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ untuk n = 0, 1, 2, 3, ... dimana c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta.

Contoh 6.

Tentukan jawaban dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6$.

Penyelesaian

Dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ akan diperoleh persamaan karakteristik $r^2 - 6r + 9 = 0$ dengan akar r = 3. Maka, jawaban dari relasi relurensi ini adalah $a_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$.

Dengan syarat awal diketahui, akan didapat $a_0 = 1 = c_1$ dan

$a_1 = 6 = 3 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2$

Pemecahan kedua persamaan di atas menghasilkan $c_1 = 1$ dan $c_2 = 1$

Sehingga penyelesaian umum dari permasalahan di atas adalah

$a_n = 3^n + n3^n$

3. **r_1, r_2 dua bilangan kompleks**

Misalkan k_1 dan k_2 adalah suatu bilangan riil. Jika $r^2 - k_1 r - k_2 = 0$ mempunyai akar-akar r_1 dan r_2 dengan $r_1, r_2 \in K$, maka deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi $a_n = m_1 a_{n-1} + m_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ untuk n = 0, 1, 2, 3, ... dimana c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta.

Sebelum membicarakan jika akar-akarnya kompleks, kita akan mengulang kembali Theorema De Moivre dimana $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos (n\alpha) + i \sin (n\alpha)$, $n > 0$. Jika $z = x + iy \in K$, dapat dituliskan $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan \alpha = y/x$. Maka Theorema De Moivre $z^n = r^n (\cos (n\alpha) + i \sin (n\alpha))$, $n > 0$

<u>Contoh 7</u>.

Tentukan $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{10}$

Penyelesaian

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

Sehingga $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{10} = 2^{10} (\cos (10\pi/3) + i \sin (10\pi/3))$

<u>Contoh 8</u>.

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 2\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right), n \geq 2, a_0 = 1,$ $a_1 = 2$

Penyelesaian $a_n = c(r^n)$, dimana $c \neq 0$ dan $r \neq 0$. Persamaan karakteristik dari relasi rekursi di atas adalah $r^2 - 2r + 2 = 0$, dengan akar-akar $1 \pm i$. Konsekuensinya, penyelesaian umumnya adalah:

$$a_n = c_1 (1 + i)^n + c_2 (1 - i)^n .$$

Dimana c_1 dan c_2 sebagai suatu konstanta bilangan kompleks.

$$(1 + i) = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + i \sin (\pi/4))$$

$$(1 - i) = \sqrt{2} (\cos(-\pi/4) + i \sin (-\pi/4))$$

$$= \sqrt{2} (\cos(\pi/4) - i \sin (\pi/4))$$

$$a_n = c_1 \left(\sqrt{2}\right)^n (\cos(n\pi/4) + i \sin (n\pi/4))$$

$$+ c_2 \left(\sqrt{2}\right)^n (\cos(n\pi/4) - i \sin (n\pi/4))$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n [k_1 \cos(n\pi/4) + k_2 \sin (n\pi/4)]$$

Dimana $k_1 = c_1 + c_2$ dan

$k_2 = (c_1 - c_2)i$

$a_0 = 1 = [k_1 \cos(0) + k_2 \sin(0)]$

$= k_1$

$a_1 = 2 = \sqrt{2}\,[k_1 \cos(\pi/4) +$

$k_2 \sin(\pi/4)]$

$= 1 + k_2$

Sehingga didapatkan $k_2 = 1$

Didapatkan penyeleesaian umum dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n = c_1\left(\sqrt{2}\right)^n[\cos(n\pi/4) + \sin(n\pi/4)]$, n > 0.

Secara umum relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan sebagai berikut:

Jika diberikan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ suatu bilangan riil, dengan persamaan karakteristik

$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ memiliki k buah akar-akar yang berbeda. Maka barisan a_n memiliki penyelesaian umum:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

untuk n = 1,2, 3, ... dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ suatu konstanta.

Contoh 9.

Tentukan penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ dengan syarat awal $a_0 = 2, a_1 = 5,$. $\alpha_2 = 15$

Penyelesaian

Dengan mensubstitusikan $a_n = c(r^n)$ dan selanjutnya membagi masing-masing suku dengan r^{n-3} akan diperoleh Persamaan karakteristik $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. Selanjutnya diperoleh akar-akar karakteristik $r = 1$, $r = 2$, dan $r = 3$.

Sehingga bentuk umum penyelesaiannya adalah:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n.$$

Nilai konstanta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9$$

Dengan menggunakan sedikit manipulasi aljabar akan didapatkan: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$.

Didapat Penyelesaian Umum dari relasi rekurensi di atas adalah: $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

Perhatikan berikut ini

Jika diberikan suatu relasi rekurensi $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + ... + c_{n-k} a_{n-k} = 0$, $c_n, c_{n-1}, ... c_{n-k} \neq 0$, dengan akar karakteristik r sebanyak m, $2 \leq m \leq k$, maka penyelesaian umumnya adalah:

$$A_n = A_0 r^n + A_1 n r^n + A_2 n^2 r^n + ... + A_{m-1} n^{m-1} r^n$$

atau

$$A_n = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + ... + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

<u>Contoh 10</u>.

Tentukan penyelesaian umum dari Relasi Rekurensi $A_n = 9A_{n-1} - 27A_{n-2} + 27A_{n-3}$.

Dengan $A_0 = 2, A_1 = 6, A_2 = 66$!

Penyelesaian

Dengan mensubstitusikan $a_n = c(r^n)$ dan selanjutnya membagi masing-masing suku dengan r^{n-3} akan diperoleh Persamaan karakteristik $r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0$. Selanjutnya diperoleh akar-akar karakteristik $r = 3$ sehingga bentuk umum penyelesaiannya adalah: $A_n = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2) 3^n$

Nilai konstanta A_0, A_1, dan A_2 diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$A_0 = 2 = A_0$$

$$A_1 = 6 = (A_0 + A_1 + A_2)3$$

$$A_2 = 66 = (A_0 + A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2^2)3^2$$
$$= (A_0 + 2A_1 + 4A_2)9$$

Dengan menggunakan sedikit manipulasi aljabar akan didapatkan : $A_0 = 2$, $A_1 = -3$, dan $A_2 = 3$.

Jadi, Penyelesaian Umum dari Relasi Rekurensi di atas adalah : $A_n = (2 - 3n + 3n^2)3^n$

<u>Contoh 11</u>.

Diasumsikan pertumbuhan kijang di sebuah taman nasional adalah 1.000 ekor pada waktu $n = 0$ dan pertumbuhan populasi dari waktu n-1 ke waktu n adalah 10% dari jumlah populasi pada waktu n-1. Tentukan relasi rekurensi sesuai dengan paparan kondisi di atas.

Penyelesaian

Dimisalkan d_n sebagai petumbuhan kijang pada waktu ke n. Sehingga didapatkan

$d_0 = 1.000$

Petumbuhan populasi dari waktu ke n-1 ke waktu ke n dimisalkan $d_n - d_{n-1}$. Karena pertumbuhannya adalah 10% dari populasi waktu ke n-1, maka

$$d_n - d_{n-1} = 10\%\ d_{n-1}$$

$$d_n = 1{,}1\ d_{n-1}$$

dengan iterasi didapatkan

$d_n = 1{,}1\ d_{n-1} = 1{,}1\ (1{,}1\ d_{n-2}) = 1{,}1^2\ d_{n-2}$ $= ...= 1{,}1^n\ d_0 = \mathbf{1{,}1^n\ (1.000)}$

Penutup

Relasi rekurensi mendefinisikan suku ke-n dari sebuah barisan secara tak langsung; untuk menghitung a_n, pertama-tama harus dihitung a_0, a_1, ..., a_{n-1}. Salah satu permasalahan yang melibatkan relasi rekurensi adalah Menara Hanoi dengan bentuk umum penyelesaian adalah $2^n - 1$. Penyelesaian relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan akan melibatkan bentuk persamaan kuadrat, yang selanjutnya akan disebut sebagai persamaan karakteristik dengan 2 akar, yaitu (1) r_1, r_2 dua bilangan riil yang berbeda. (2) r_1, r_2 dua bilangan kompleks. (3) r_1, r_2 dua bilangan riil yang sama, selanjutnya r_1 dan r_2 akan disebut akar-akar karakteristik.

Daftar Pustaka

Chen, W. W. 1982. *Discrete Mathematics*. Diambil dari www.4shared.com

Knight,Tony. 2006. *The Maths Notebook*. Diambil dari www.4shared.com

Rosen, H. Kenneth. 1998. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Beijing: China Machine Press/ The McGraw-Hill Companies