OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA RUANG HILBERT

Puji Nugraheni
Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Ruang Hilbert atas lapangan bilangan kompleks (**C**) *dapat dibangun dari suatu ruang inner product (inner product space). Ruang Hilbert merupakan ruang inner product yang lengkap yaitu ruang inner product yang setiap barisan Cauchynya konvergen. Pada ruang Hilbert dapat didefinisikan suatu operator linear terbatas. Untuk setiap operator linear terbatas T pada ruang Hilbert akan terdapat dengan tunggal operator adjoint dari T yaitu T* yang juga merupakan operator linear terbatas.*

Kata kunci : *ruang inner product, ruang Hilbert, operator linear terbatas, operator adjoint*

PENDAHULUAN

Pada studi mengenai dasar-dasar analisis fungsional dan analisis abstrak telah dipelajari tentang Ruang *Hilbert* (*Hilbert Space*) atas lapangan bilangan real. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai Ruang *Hilbert* atas lapangan bilangan kompleks dan operator linear terbatasnya yaitu mengenai konsep dan teori umum dari operator linear terbatas. Perbedaan Ruang *Hilbert* atas lapangan bilangan real dan Ruang *Hilbert* atas lapangan bilangan kompleks terletak pada sifat *inner product* sebagai pembentuk dari Ruang *Hilbert* karena bilangan real mempunyai konjugat berupa bilangan real itu sendiri sedangkan pada bilangan kompleks konjugatnya berbeda dengan bilangan kompleks semula.

RUANG INNER PRODUCT (*INNER PRODUCT SPACE*)

Bilangan kompleks merupakan bilangan yang berbentuk $z = x + iy$ dengan $x, y \in \Re$ dan $i^2 = -1$. Dalam hal ini x dinamakan bagian real dan y dinamakan bagian imajiner. Himpunan semua bilangan kompleks ditulis dengan **C**. Pada system bilangan kompleks , operasi penjumlahan dan perkalian berturut-turut didefinisikan : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ dan $z_1.z_2 = (x_1.x_2 - y.y_2) + i(x_1y_2 + x_2.y_1)$ dengan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

Himpunan tak kosong H yang dilengkapi dengan operasi biner + dan . disebut ruang vector atas lapangan bilangan kompleks **C** jika memenuhi sifat:

1. Terhadap operasi penjumlahan
   a. kommutatif yaitu untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x + y = y + x$
   b. assosiatif yaitu untuk setiap $x, y, z \in H$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$
   c. ada elemen netral $\theta \in H$ sehingga untuk setiap $x \in H$ berlaku $x + \theta = \theta + x = x$
   d. terdapat $-x \in H$ sehingga berlaku $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ untuk setiap $x \in H$, -x disebut invers $x \in H$
2. Untuk setiap $x, y \in H$ dan $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ berlaku:
   a. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
   b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$
   c. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
   d. $1.x = x$

Untuk suatu H ruang vector atas bilangan kompleks **C**, fungsi (,) :$H \times H \to \mathbf{C}$ disebut *inner product* jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. $(x,x) \geq 0$ untuk setiap $x \in H$ dan $(x,x) = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$ (nol vector)
2. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$ untuk setiap $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$ dan x_1, x_2, $y \in H$
3. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ untuk setiap $x, y \in H$.

Definisi 2.1. (Paul A. Fuhrmann, 1981)

Ruang vector H yang dilengkapi dengan suatu inner product disebut ruang inner product (inner product space)

RUANG HILBERT (*HILBERT SPACE*)

H himpunan tak kosong, fungsi ρ: HxH→C disebut metrik jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

a. $\rho(x,y) \geq 0$ dan $\rho(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ untuk setiap $x,y \in H$

b. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ untuk setiap $x,y \in H$

c. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ untuk setiap $x,y,z \in H$

Definisi 3.1. (Erwin Kreyzig, 1978)

Barisan $\{x_n\}$ dalam ruang metrik H dikatakan konvergen ke $x \in H$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_o sehingga untuk $n \geq n_o$ berlaku $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ dengan $\rho(x_n, x)$ merupakan metrik.

Definisi 3.2. (Erwin Kreyzig, 1978)

Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_o sehingga untuk $m,n \geq n_o$ berlaku $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Dari pengertian ruang *inner product*, barisan *Cauchy* dan kekonvergenan dapat diturunkan pengertian Ruang *Hilbert*.

Definisi 3.3. (Paul A. Fuhrmann, 1981) :

Ruang Hilbert adalah ruang inner product yang setiap barisan Cauchynya konvergen.

OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA RUANG HILBERT

Definisi 4.1. (Paul A. Fuhrmann, 1981)

Operator linear A: X→ Y dengan X dan Y masing-masing *ruang Hilbert adalah operator dengan sifat:*

1. $A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$ *untuk setiap* $x_1,x_2 \in X$

2. $A(\alpha x_1)=\alpha A(x_1)$ *untuk setiap* $x_1 \in X$ dan $\alpha \in C$

Didefinisikan fungsi $\|\,\|:(T:H_1 \to H_2)\to C$ dengan $\|T\|=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ untuk setiap T operator linear.

Sifat 4.2.

$\|T\|$ *merupakan norma T*

Bukti :

a. Karena $\|Tx\|\geq 0$ dan $\|x\|\geq 0$

maka $\|T\|=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\geq 0$

$$\|T\|=0 \Leftrightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|}=0 \Leftrightarrow \|Tx\|=0 \Leftrightarrow Tx=0$$

untuk setiap x, sehingga T = 0

b. $\|\alpha T\|=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|(\alpha T)x\|}{\|x\|}$ untuk setiap $x \in H$, karena T linear maka

$$\|\alpha T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|(\alpha T)x\|}{\|x\|}$$

$$=\sup_{x\neq 0}\frac{|\alpha|\|Tx\|}{\|x\|}$$

$$=|\alpha|\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=|\alpha|\|T\|$$

c. Untuk T_1 dan T_2 operator linear berlaku sifat :

$$\|T_1+T_2\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|(T_1+T_2)x\|}{\|x\|}$$

$$=\sup_{x\neq 0}\frac{\|T_1(x)+T_2(x)\|}{\|x\|}\leq$$

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|T_1x\|+\|T_2x\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|T_1x\|}{\|x\|}+\sup_{x\neq 0}\frac{\|T_2x\|}{\|x\|}$$

$$=\|T_1\|+\|T_2\|$$

diperoleh $\|T_1+T_2\|\leq\|T_1\|+\|T_2\|$

Dari a, b, c maka $\|T\|$ merupakan norma T.

Definisi 4.3. (Paul A. Fuhrmann, 1981)

Diketahui H_1 dan H_2 merupakan ruang Hilbert. Operator linear $T:H_1\to H_2$ *disebut operator linear terbatas jika norma T yang didefinisikan :*

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \text{ berhingga.}$$

Pada pembahasan selanjutnya, himpunan operator linear terbatas dari H_1 ke H_2 bisa ditulis dengan $B(H_1,H_2)$ dan khusus untuk himpunan operator linear terbatas dari H ke H ditulis dengan B(H,H).

Diketahui H_1 dan H_2 ruang Hilbert dan h: $H_1 x H_2 \rightarrow C$ sesquilinear yaitu $h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)$ dan h terbatas maka terdapat dengan tunggal $T \in B(H_1,H_2)$ sehingga h (x,y) = (Tx,y) dan $\|T\| = \|h\|$.

OPERATOR *ADJOINT*

Definisi 5.1. (Paul A. Fuhrmann, 1981) :

Diketahui suatu operator $T \in B(H_1,H_2)$ maka $T^* \in B(H_2,H_1)$ disebut operator adjoint operator T jika untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berlaku $(Tx, y) = (x, T^*y)$.

Untuk setiap operator linear terbatas selalu mempunyai operator *adjoint* dan operator *adjoint* tersebut selalu tunggal. Hal ini akan ditunjukkan pada sifat berikut

Sifat 5.2. (Paul A. Fuhrmann, 1981) :

Diketahui T operator linear terbatas, maka akan terdapat dengan tunggal T^* yang merupakan operator linear terbatas dengan $\|T^*\| = \|T\|$.

Bukti

Didefinisikan h: $H_2 x H_1 \rightarrow C$ dengan h (y,x) = (y,Tx,) untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$.

Operator $T: H_1 \rightarrow H_2$ merupakan operator linear terbatas. Akan ditunjukkan h (y,x) = (y,Tx,) sesquilinear yaitu $h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta}(y, x_2)$ dan terbatas. Karena T linear maka untuk setiap $x_1, x_2 \in H_1$ dan $\alpha, \beta \in C$ berlaku :

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= (y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= (y, \alpha T x_1 + \beta T x_2) \\ &= (y, \alpha T x_1) + (y, \beta T x_2) \\ &= \bar{\alpha}(y, T x_1) + \bar{\beta}(y, T x_2) \\ &= \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta}(y, x_2). \end{aligned}$$

Karena

$h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta}(y, x_2)$

maka h sesquilinear.

Dengan pertidaksamaan Schwartz bahwa setiap $x, y \in H$ berlaku $|(x,y)| \le \|x\| \|y\|$ diperoleh :

$|h(y,Tx)| = |(y,Tx)|$ maka

$\le \|y\| \|Tx\| \le \|T\| \|x\| \|y\|$

$|h(y,Tx)| \le \|T\| \|x\| \|y\|$ sehingga

$$\frac{|(y,Tx)|}{\|x\| \|y\|} \le \|T\| \Leftrightarrow \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|(y,Tx)|}{\|x\| \|y\|} \le \|T\|$$

$\Leftrightarrow \|h\| \le \|T\|$ sehingga terbukti h terbatas.

Karena h: $H_2 x H_1 \to C$ sesquilinear dan terbatas maka terdapat dengan tunggal S∈ B(H₂,H₁) dengan h(y,x) = (Sx,x).

Karena h (y,x) = (y,Tx,) maka h(y,x) = (Sx,x) atau (Tx,y) = (x,Sy) sehingga diperoleh S = T*. Jadi T* merupakan operator linear terbatas.

Dari

$$\|h\| = \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|(y,Tx)|}{\|x\| \|y\|} \ge \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|(Tx,Tx)|}{\|Tx\| \|x\|} = \|T\|$$

diperoleh $\|h\| \ge \|T\|$. Karena $\|h\| \le \|T\|$ dan $\|h\| \ge \|T\|$ maka $\|h\| = \|T\|$.

Akan ditunjukkan $\|T^*\| = \|T\|$.

H(y,x) = (T*y,x) dengan $T^* : H_2 \to H_1$

$$\|h\| = \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|h(y,x)|}{\|y\| \|x\|} = \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|(T^*y,x)|}{\|y\| \|x\|}$$

$$\ge \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|(T^*y, T^*y)|}{\|T^*y\| \|y\|} = \|T^*\|$$

diperoleh $\|h\| \ge \|T^*\|$.

Dari pertidaksamaan *Schwartz* diperoleh

$|h(y,x)| = |(T^*y,x)| \le \|T^*y\| \|x\| \le \|T^*\| \|y\| \|x\|$

sehingga

$$\frac{|(T^*y,x)|}{\|y\| \|x\|} \le \|T^*\| \Leftrightarrow \sup_{x \ne 0, y \ne 0} \frac{|(T^*y,x)|}{\|y\| \|x\|} \le \|T^*\|$$

diperoleh $\|h\| \le \|T^*\|$.

Karena $\|h\| \ge \|T^*\|$ dan $\|h\| \le \|T^*\|$ didapat $\|h\| = \|T^*\|$.

Karena $\|h\| = \|T\|$ dan $\|h\| = \|T^*\|$ maka $\|T^*\| = \|T\|$.

Jadi terbukti terdapat dengan tunggal operator linear terbatas T* dengan $\|T\| = \|T^*\|$.

Definisi 5.3. (Paul A Fuhrmann, 1981) :

$T \in B(H)$ disebut operator adjoint dari dirinya sendiri (self adjoint) jika $T^* = T$.

PENUTUP

Berdasarkan uraian diatas diperoleh bahwa Ruang *Hilbert* adalah ruang *inner product* yang lengkap yaitu ruang *inner product* yang setiap barisan *Cauchy*nya konvergen. Pada ruang *Hilbert* dapat didefinisikan suatu operator linear T dengan daerah asalnya merupakan ruang *Hilbert* dan daerah hasilnya juga merupakan ruang *Hilbert*. Operator linear T disebut operator linear terbatas jika norma yang didefinisikan $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ berhingga. Untuk suatu operator linear terbatas T dari H_1 ke H_2 akan terdapat dengan tunggal operator T* dari H_2 ke H_1 yang merupakan operator *adjoint* operator T dengan $\|T\| = \|T^*\|$.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, Sterling K. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. New York : Oxford University Press

Fuhrmann, Paul A. 1981. Linear *System and Operator in Hilbert Space*. New York : Mc Graw Hill and Sons Co. Inc

Kreyzig, Erwin. 1978. *Introduction to Functional Analysis with Application*. New York : John Wiley and Sons Inc

Palioras, John D. 1975. *Complex Variables for Scientist and Engineer*. New York : Macmillan Publising Co