GRUP PERMUTASI

Bambang Priyo Darminto
Jurusan Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Purworejo

Abstrak

Simetri dari sebuah bangun geometri dapat diartikan sebagai penempatan kembali bangun tersebut sehingga dengan tepat menempati bingkainya semula. Pada hakikatnya, penempatan bangun geometri ke dalam bingkainya semula menyatakan suatu bentuk pemetaan.

Suatu grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dengan operasi komposisi disebut ***grup permutasi****. Secara khusus, jika sekumpulan permutasi dari suatu himpunan S yang tidak kosong (nonempty) merupakan sebuah grup dengan operasi komposisi fungsi (○), maka S disebut* ***grup permutasi*** *atau disebut* ***grup simetri pada S****. Jika order dari S adalah n, maka grup simetri ini dan ditulis* S_n*. Elemen-elemen sebuah grup simetri* S_3 *diperoleh melalui 6 cara penempatan segi tiga sama sisi pada bingkai semula. Grup semacam ini disebut juga* ***grup dihedral*** *segi tiga, dan ditulis dengan notasi* $\boldsymbol{D_3}$***.*** *Secara umum, suatu elemen-elemen dari grup dihedral* D_n *adalah semua simetri dari segi-n beraturan, dan order dari* D_n *adalah 2n. Untuk menampilkan elemen-elemen dari grup dihedral ini diperlukan fungsi* ***cyclic*** *dan* ***dihedral****. Grup siklik didefinisikan untuk semua bilangan bulat positif n, tetapi grup dihedral didefinisikan hanya untuk lebih besar dari 3.*

Kata kunci : *simetri, pemetaan, grup, permutasi, dihedral, order, operasi komposisi*

Pendahuluan

Grup permutasi merupakan salah satu pokok bahasan yang sangat penting dalam Aljabar Abstrak. Topik-topik yang penting dalam pokok bahasan ini meliputi kesimetrian bangun-bangun geometri, representasi *disjoint cycle*, grup simetri, dan aplikasi komputer dari program Maple dalam grup. Beberapa masalah sederhana (bukan pembuktian suatu teorema atau sejenisnya) yang menyangkut tentang grup permutasi dapat dilakukan oleh komputer secara cepat dan mudah.

Sebelum menjelaskan secara detail tentang grup permutasi, perlu diingat bahwa banyaknya permutasi dari sejumlah n objek adalah n!, di mana:

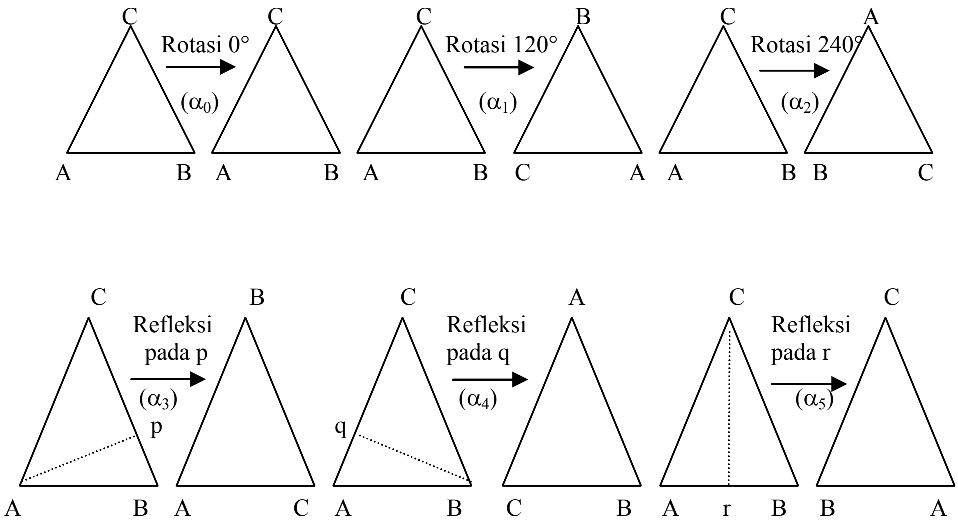
n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...1,

dan banyaknya permutasi dari n objek yang masing-masing permutasi dikelompokkan dalam k objek dirumuskan sebagai $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$. Permutasi dapat dipandang sebagai pemetaan atau fungsi satu-satu dan onto dari S ke dirinya sendiri (S → S), di mana S adalah suatu himpunan yang tidak kosong (*non empty*).

Makalah ini dimulai dengan menjelaskan pengertian simetri dari bangun-bangun geometri (dalam makalah ini diambil bangun segitiga sama sisi), operasi komposisi, notasi siklik beserta operasinya. Kemudian dilanjutkan dengan pengertian tentang grup permutasi dan berbagai isu yang berkenaan dengan grup permutasi, kemudian diakhiri dengan beberapa contoh penggunaan program aplikasi komputer, khususnya perintah-perintah dalam Maple yang diaplikasikan dalam grup. Dalam aplikasi Maple ini disajikan contoh-contoh sederhana yang berkenaan dengan masing-masing topik yang dijelaskan dalam makalah ini.

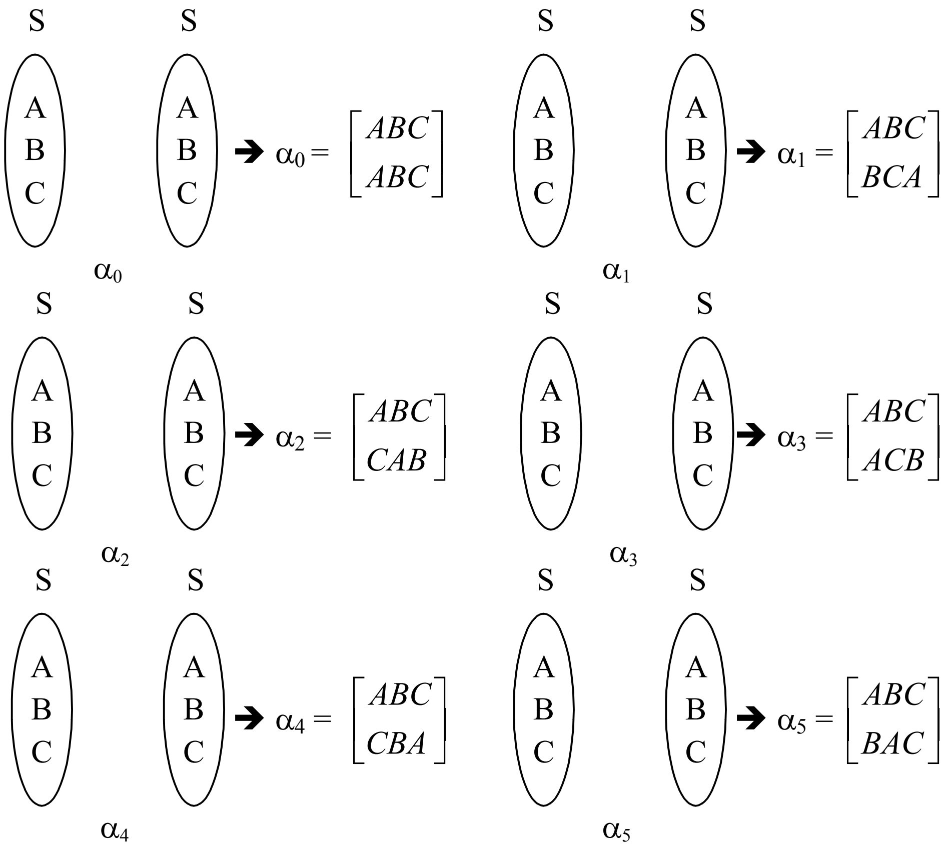
1. Simetri

Simetri dari sebuah bangun geometri dapat diartikan sebagai penempatan kembali bangun geometri tersebut sehingga dengan tepat menempati bingkainya semula. Pada hakikatnya, penempatan bangun geometri ke dalam bingkainya semula menyatakan suatu bentuk *pemetaan*. Untuk menjelaskan hal tersebut, perhatika ▲ABC sama sisi berikut :



Gambar 1 Simetri-simetri segitiga sama sisi

Gambar 1 menunjukkan sebuah ▲ABC sama sisi diputar dengan sudut tertentu sehingga menempati bingkainya semula. Ternyata ada 3 perputaran, masing-masing sebesar $0° = \alpha_0$, $120° = \alpha_1$, $240° = \alpha_2$. Kemudian ▲ABC dicerminkan masing-masing pada garis p, q, r , yang masing-masing diberi notasi α_3, α_4, dan α_5. Dengan demikian seluruh permutasi (baik rotasi maupun refleksi) dari 3 titik sudut A, B, C dapat diperoleh 6 buah permutasi (6! = 3.2.1), sehingga ▲ABC sama sisi memiliki 6 buah simetri. Hasil permutasi dari segitiga sama sisi pada pemutaran dan pencerminan tersebut merupakan pemetaan ke dirinya sendiri. Selanjutnya, jika permutasi tersebut disajikan dalam bentuk pemetaan, maka ditampilkan sebagai berikut: S = {A, B, C}

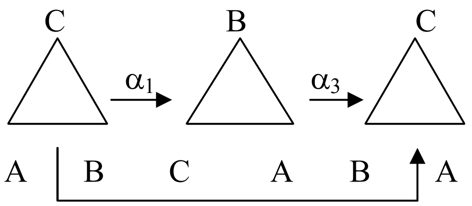


Gambar 2 Pemetaan 1-1 dan onto dari S ke S

Berdasaran permutasi-permutasi dari segitiga sama sisi di atas, selanjutnya muncul suatu pertanyaan bahwa apa yang akan dihasilkan jika segitiga tersebut digerakkan (ditransformasikan) dengan cara tertentu kemudian dilanjutkan lagi dengan cara yang sama atau yang lain ? Perlu diketahui bahwa transformasi-transformasi yang berturut-turut itu dinamakan ***komposisi transformasi***. Suatu contoh, andaikan segitga sama sisi ▲ABC tersebut diputar sebesar 120^0 (α_1), kemudian dicerminkan terhadap garis p (α_3). Komposisi transformasi tersebut ditulis dengan notasi $\alpha_3 \circ \alpha_1$, di mana "○" adalah operasi komposisi. Untuk memperoleh hasil operasi komposisi $\alpha_3 \circ \alpha_1$, dapat dilakukan dengan 2 cara yaitu:

a. Menggunakan gambar.

Perhatikan sketsa di bawah ini.



$$\alpha_3 \circ \alpha_1 = \alpha_4$$

Gambar 3. Komposisi transformasi

a. Menggunakan kaidah operasi komposisi

Karena transformasi permutasi merupakan pemetaan /fungsi, maka komposisi transformasi merupakan komposisi fungsi.

$$(\alpha_3 \circ \alpha_1)(A) = (\alpha_3\ \alpha_1)(A)$$
$$= \alpha_3\ (\alpha_1\ (A))$$
$$= \alpha_3\ (B) = C$$

$$(\alpha_3 \circ \alpha_1)(B) = (\alpha_3\ \alpha_1)(B)$$
$$= \alpha_3\ (\alpha_1\ (B))$$
$$= \alpha_3\ (C) = B$$

$$(\alpha_3 \circ \alpha_1)(C) = (\alpha_3\ \alpha_1)(C)$$
$$= \alpha_3\ (\alpha_1\ (C))$$
$$= \alpha_3\ (A) = A$$

Jadi $\alpha_3 \circ \alpha_1 = \begin{bmatrix} ABC \\ CBA \end{bmatrix} = \alpha_4$

Dengan cara yang hampir serupa, diperoleh:

$$\alpha_1 \circ \alpha_3 = \begin{bmatrix} ABC \\ BAC \end{bmatrix} = \alpha_5$$

Nampak bahwa $\alpha_3 \circ \alpha_1 \neq \alpha_1 \circ \alpha_3$ .Jadi, pada umumnya operasi komposisi transformasi ***tidak*** bersifat komutatif.

2. Grup Permutasi

Himpunan S yang tidak kosong dengan operasi $\circ$ disebut grup jika memenuhi syarat sebagai berikut :

a. S tertutup terhadap operasi $\circ$

$\forall$ a, b $\in$ S; a$\circ$ b $\in$ S

b. Operasi $\circ$ bersifat asosiatif

$\forall$ a,b,c$\in$S; $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$

c. Terdapat elemen identitas

$\exists e \in S$; $a\circ e = e\circ a$, $\forall\ a \in S$

d. Setiap elemen dalam S mempunyai invers

$\forall a\in S, \exists a^{-1}\in S \Rightarrow a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e$

Jika suatu grup memenuhi sifat *komutatif*, maka grup itu disebut *Grup Abelian*. Suatu grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi dengan operasi komposisi disebut ***grup permutasi***. Secara khusus, jika sekumpulan permutasi dari suatu himpunan S yang tidak kosong (*nonempty*) merupakan sebuah grup dengan operasi komposisi fungsi (○), maka S disebut ***grup permutasi*** atau disebut ***grup simetri pada S***. Jika order dari S adalah n, maka grup simetri ini dan ditulis S_n.

Contoh :

Diketahui S = {1, 2, 3}

S_3 adalah himpunan fungsi satu-satu dari S ke S. Terhadap operasi komposisi fungsi (○), maka S_3 adalah grup dengan 6 elemen. Elemen-elemen tersebut adalah :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 123 \\ 123 \end{bmatrix}; \quad \alpha = \begin{bmatrix} 123 \\ 132 \end{bmatrix};$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 123 \\ 231 \end{bmatrix}; \quad \chi = \begin{bmatrix} 123 \\ 213 \end{bmatrix};$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 123 \\ 312 \end{bmatrix}; \quad \phi = \begin{bmatrix} 123 \\ 321 \end{bmatrix}$$

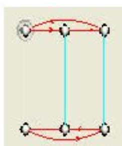
$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 123 \\ 321 \end{bmatrix} \text{ dan } \beta\alpha = \begin{bmatrix} 123 \\ 213 \end{bmatrix}$$

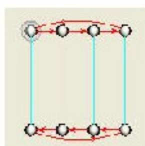
Ternyata, $\beta\alpha \neq \alpha\beta$. Jadi S_3 bukan grup Abelian.

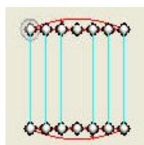
3. Grup Dihedral

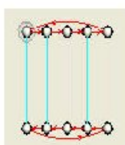
3.1 Definisi dan Desain Grafis

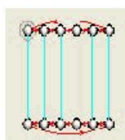
Grup simetri S_3 di atas diperoleh dari 6 cara penempatan segi tiga sama sisi pada bingkai semula (Gambar 1). Grup semacam ini disebut juga ***grup dihedral*** segi tiga, dan ditulis dengan notasi $\mathbf{D_3}$**.** Secara umum, suatu elemen-elemen dari grup dihedral D_n adalah semua simetri dari segi-n beraturan. Order dari D_n adalah 2n. Berikut disajikan desain grafis dari beberapa grup dihedral dengan menggunakan komputer(http://www-group.dcs.st.and.ac. uk/~history/.)

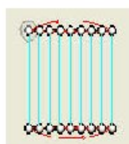

D_3

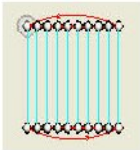

D_4

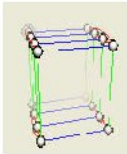

D_7

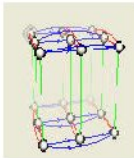

D_5


D_6


D_9


D_{10}


$D_4 \times Z_2$


$S_3 \times Z_4$

Menampilkan Elemen Grup Dihedral

Grup dihedral merupakan grup permutasi karena elemen-elemen grup merupakan hasil permutasi.

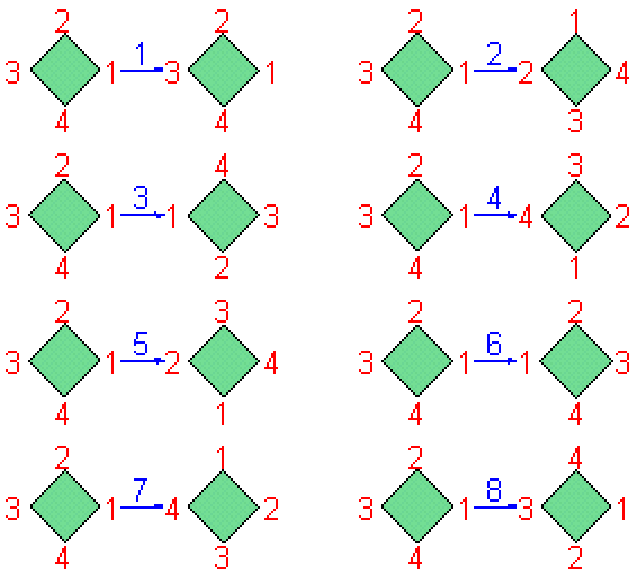
Elemen-elemen ini dapat ditampilkan atau ditentukan secara cepat melalui komputer dengan program Maple.

Untuk menampilkan elemen-elemen dari grup dihedral diperlukan fungsi ***cyclic*** dan ***dihedral***. Grup siklik didefinisikan untuk semua bilangan bulat positif n, tetapi grup dihedral didefinisikan hanya untuk lebih besar dari 3.

Contoh :

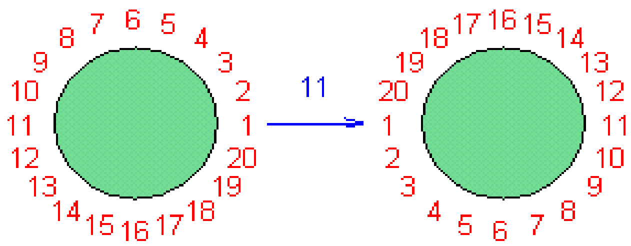
> **Grid(dihedral(4),1,2,4);**

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```



Gambar 5. Representasi Grup D_4

>Grid(dihedral(20),11,1,1);



Gambar 6. Representasi Grup D_{20}

Penutup

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa :

a. Permutasi dapat dipandang sebagai pemetaan atau fungsi *satu-satu* dan *onto* dari S ke dirinya sendiri (S → S), di mana S adalah suatu himpunan yang tidak kosong (*non-empty*).

b. Permutasi dan kesimetrian dalam matematika dapat dije-laskan dengan baik melalui sebuah struktur aljabar yang disebut *grup*.

c. Pada umumnya, permutasi-permutasi dari S = {1, 2, 3, ..., n} membentuk sebuah grup, yang ditulis S_n. Grup S_n disebut juga *grup simetri*. Pada umumnya S_n *bukan* merupakan grup Abelian.

Beberapa masalah (bukan pembuktian teorema) yang berkaitan dengan grup per-mutasi dapat diselesaikan dengan cepat dan tepat melalui bantuan computer, antara lain program aplikasi ***Maple***.

Daftar Pustaka

Durbin, John R. 2005. *Modern Algebra, An Introduction*. Singapore. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Galian, Joseph A. 1998. *Contemporary Abstract Algebra*. Boston. Houghton Mifflin Company.

Group Library.htm [Online]. Tersedia : http://www-group.dcs.st.and.ac.uk/~history/ [5 Januari 2006]

Program Aplikasi Komputer. ***Maple 9.5***.

Wahyudin, 2000. *Pengantar Aljabar Abstrak*.Bandung. CV Delta Bawean.