JIMT
Vol. 13 No. 2 Desember 2016 (Hal 11 - 16)

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
ISSN : 2450 – 766X

KELAS GRAF RAMSEY MINIMAL $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$ YANG TERBATAS PADA ORDE DAN DIAMETER

K. Saleh[1], I W. Sudarsana[2], dan Resnawati[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tadulako
Jalan Sukarno-Hatta Km. 9 Palu 94118, Indonesia
[1]ekosaleh002@gmail.com, [2]sudarsanaiwayan@yahoo.co.id, [3]r35n4w4t1@yahoo.com

ABSTRACT

A graph F is called Ramsey (G, H)-minimal graph if $F \to (G, H)$ and $F - e \nrightarrow (G, H)$ for every edge e. Notation $F \to (G, H)$ mean that any red-blue coloring of the edges of F implies there is subgraph G contains all of red edges or subgraph H contains all of blue edges. While, notation $F - e \nrightarrow (G, H)$ mean that red-blue coloring of the edges of F implies there is no subgraph G contains all of red edges and subgraph H contains all of blue edges. The purpose of this research is to obtain class of Ramsey-minimal graph in combination of graph $3K_2$ and F_5. The result showed that 13 connected graf of F with orde between 19-25, 1 connected graph graph of F with diameter 2 and 1 disconnected graph of F which is combination of 3 graph F_5 contained in $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$.

Keywords : **Complete Graph, Fan Graph, Ramsey $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$-minimal Graphs.**

ABSTRAK

Graf F disebut sebagai graf Ramsey (G, H)-minimal jika $F \to (G, H)$ dan $F - e \nrightarrow (G, H)$ untuk sebarang sisi e di F. Notasi $F \to (G, H)$ berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi – sisi graf F senantiasa terdapat subgraf G yang memuat semua sisinya merah atau subgraf H yang memuat semua sisinya biru. Sedangkan notasi $F - e \nrightarrow (G, H)$ berarti bahwa terdapat pewarnaan merah-biru terhadap sisi – sisi graf F yang mengakibatkan tidak terdapat subgraf G yang memuat semua sisinya merah dan subgraf H yang memuat semua sisinya biru. Semua graf (G, H)-minimal dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan kelas Ramsey (G, H)-minimal, dan dinotasikan dengan $\mathcal{R}(G, H)$. Tujuan penelitian ini untuk mendapatkan kelas graf Ramsey minimal dari graf $3K_2$ dan graf F_5. Hasil penelitian menunjukkan terdapat 13 graf F terhubung yang berorde antara 19-25, 1 graf F terhubung berdiameter 2 dan 1 graf F tak terhubung yaitu gabungan 3 buah graf F_5 yang termuat di $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$.

Kata Kunci : **Graf Kipas, Graf Lengkap,Graf Ramsey $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$-minimal.**

I. PENDAHULUAN

Ilmu pengetahuan dan teknologi tidak lepas dari peran serta matematika. Aplikasi matematika sangat banyak sekali dalam ilmu pengetahuan lain, salah satunya adalah teori graf. Teori graf adalah salah satu cabang matematika diskrit yang penting dan banyak manfaatnya. Antara lain dalam komunikasi, transportasi, sistem antrian dan penjadwalan.

Graf F disebut sebagai graf Ramsey (G,H)-minimal jika F → (G,H) dan F - *e* ↛ (G,H) untuk sebarang sisi *e* di F (Burr dkk, 1976). Untuk setiap graf G dan H sebarang, notasi F→ (G,H) berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, senantiasa terdapat subgraf G yang memuat semua sisinya merah atau subgraf H yang memuat semua sisinya biru. Sedangkan notasi F↛ (G,H) berarti bahwa terdapat pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, sedemikian sehingga tidak ada subgraf G yang semua sisinya merah dan subgraf H yang semua sisinya biru.

Penelitian mengenai Ramsey minimal terus berkembang pesat. Di antaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Burr dkk. (1978) membuktikan bahwa $\mathcal{R}(K_2, H)$ adalah $\{H\}$, $\mathcal{R}(2K_2, 2K_2)$ adalah $\{3K_2, C_5\}$, $\mathcal{R}(2K_2, K_3)$ adalah $\{2K_3, K_5\}$. Burr dkk. (1980) juga membuktikan bahwa $\mathcal{R}(3K_2, 2K_2)$ adalah $\{4K_2, C_7\}$, $\mathcal{R}(4K_2, 2K_2)$ adalah $\{5K_2, 2C_5\}$. Selain itu, Mengersen dan Oeckermann (1999) membuktikan bahwa $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,2})$ adalah $\{2K_{1,2}, C_4, C_5\}$. Burr dkk. (1980) dan Mushi dan Baskoro (2012) secara berurutan telah membuktikan bahwa $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,3})$ adalah $\{2K_{1,3}\}$, serta $\mathcal{R}(3K_2, P_3)$ adalah $\{3P_3, C_4 \cup P_3, C_5 \cup P_3, C_7, C_8\}$.

II. TINJAUAN PUSTAKA

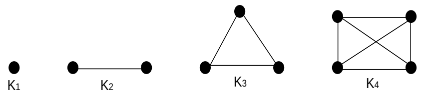
2.1. Definisi Graf dan Orde pada Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$ Sedangkan banyaknya titik di V disebut orde dari G dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya sisi di *E* disebut ukuran dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G)* (Chartrand dan Lesniak, 1986).

2.2. Jenis – Jenis Graf

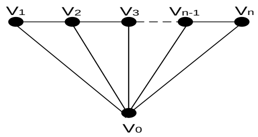
Graf dibagi menjadi beberapa kelas, pada bagian ini ada beberapa jenis – jenis graf yang berkaitan pada penelitian ini.

1. Graf Lengkap



Gambar 1. Contoh graf lengkap

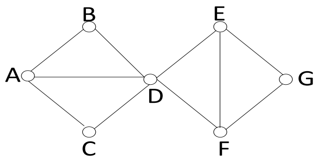
2. Graf Kipas



Gambar 2. Contoh graf kipas F_n

2.3. Diameter Graf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan u, v elemen V adalah dua titik sebarang di G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua titik di G, dinotasikan $diam(G) = \max \{d(u, v) \mid \forall\, u, v \in G\}$. (Javaid dan Shokat,2008).



Gambar 3. Contoh graf G terhubung

2.4. Ramsey Minimal

Untuk setiap graf G dan H sebarang, notasi F→ (G,H) berarti bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, senantiasa terdapat subgraf G yang memuat semua sisinya merah atau subgraf H yang memuat semua sisinya biru. Sedangkan notasi F↛ (G,H) berarti bahwa terdapat pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf F, sedemikian sehingga tidak ada subgraf G yang semua sisinya merah dan subgraf H yang semua sisinya biru. F disebut sebagai graf Ramsey (G,H) -minimal jika F → (G,H) dan F - *e* ↛ (G,H) untuk sebarang sisi *e* di F (Burr dkk, 1976).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas beberapa graf diameter kurang dari atau sama dengan dua dan beberapa graf F yang di klasifikasikan berdasarkan order yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$.

Lemma 3.1 *Misalkan F graf sebarang. Jika λ adalah pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi graf F yang menghindari adanya $3K_2$-merah dan memuat F_5-biru di F dengan tunggal, maka untuk setiap sisi $e \in E(F_5$-biru) di F berlaku $F - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$.*

Bukti :

Pandang pewarnaan merah-biru λ pada sisi-sisi graf F yang menghindari adanya $3K_2$-merah dan memuat F_5-biru di F dengan tunggal.

Akan ditunjukkan $F - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$ untuk setiap sisi $e \in E(F_5$-biru) di F.

Karena pewarnaan λ menghindari adanya $3K_2$-merah di F namun memuat F_5-biru di F dengan tunggal, maka $F - e$ tidak memuat F_5-biru untuk setiap $e \in E(F_5$-biru). Oleh karena itu, terdapat pewarnaan merah-biru λ di $F - e$ sedemikian sehingga $F - e \nsupseteq 3K_2$-merah dan $F - e \nsupseteq F_5$-biru.

Jadi, $F - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$.

Dalam penelitian ini diperoleh beberapa graf terhubung dan graf tidak terhubung yang berada dalam $\mathcal{R}(3k_2, F_5)$.

3.1 Kelas Graf Ramsey Minimal Terhubung dari $\mathcal{R}(3k_2, F_5)$

Dalam penelitian inidiperoleh satu graf berdiameter dua dan tiga belas graf berorde 19 sampaii 25 yang berada dalam $\mathcal{R}(3k_2, F_5)$.

Teorema 3.1 :

Jika $\mathcal{A}_1 = \{\mathrm{F} \in \mathcal{R}(3\mathrm{K}_2, \mathrm{F}_5) | \mathrm{F\ adalah\ Graf\ Terhubung}\}$, maka $\{\mathrm{K, H, A, I, R, U, L, S, T, F, M, J, C, P}\} \subseteq \mathcal{A}_1$.

Akan ditunjukkan graf $K \in \mathcal{R}(3K_2, F_5)$.

(i) $K \rightarrow (3K_2, F_5)$

Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi di K. Untuk sebarang pewarnaan pada sisi-sisi K akan senantiasa didapat $3K_2$ merah atau F_5 biru. Sebagai ilustrasi misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut, bagaimanapun cara mewarnai sisi-sisinya akan senantiasa diperoleh F_5 biru. Dalam hal ini pandang pewarnaan sisi-sisi v_1v_2, v_1v_8, v_1v_{17}, v_2v_8, v_7v_8, dan v_7v_{17} di *K* dengan warna merah, dapat diverifikasi bahwa sisi-sisi v_2v_7, v_3v_7, v_4v_7, v_5v_7, v_6v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, dan v_5v_6 membentuk F_5 biru sedemikian sehingga diperoleh F_5.

(ii) $K - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$ untuk sebarang $e \in K$

Kasus 1, misalkan diberikan pewarnaan merah-biru λ pada sisi-sisi graf K seperti pada Gambar 4.2 dengan $E(F_5$-biru) di K adalah v_2v_7, v_3v_7, v_4v_7, v_5v_7, v_6v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, dan v_5v_6. Berdasarkan Lemma 4.1 misalkan $e \in E(F_5$-biru) di K maka $K - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$.

3.2 Kelas Graf Ramsey Minimal Tak Terhubung dari $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$

Berikut ini diberikkan Teorema untuk graf tak terhubung yang memenuhi syarat kedua graf Ramsey (G,H).

Teorema 3.2 :

Jika $\mathcal{A}_2 = \{F \in \mathcal{R}(3K_2, 3F_5) | F\ adalah\ Graf\ Tak\ Terhubung\}$, *maka* $\{3F_5\} \subseteq \mathcal{A}_2$

Bukti :

Akan ditunjukkan graf $3F_5 \in \mathcal{R}(3K_2, F_5)$

(i) $3F_5 \rightarrow (3K_2, F_5)$

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $3F_5 \rightarrow (3K_2, F_5)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi di $3F_5$. Untuk sebarang pewarnaan pada sisi-sisi $3F_5$ akan senantiasa didapat $3K_2$ merah atau F_5 biru. Sebagai ilustrasi misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut, bagaimanapun cara mewarnai sisi-sisinya akan senantiasa diperoleh F_5 biru. Dalam hal ini pandang pewarnaan sisi-sisi v_1v_6 dan v_7v_8 di $3F_5$ dengan warna merah, dapat diverifikasi bahwa sisi-sisi $v_{13}v_{14}$, $v_{13}v_{15}$, $v_{13}v_{16}$, $v_{13}v_{17}$, $v_{13}v_{18}$, $v_{14}v_{15}$, $v_{15}v_{16}$, $v_{16}v_{17}$, dan $v_{17}v_{18}$ membentuk F_5 biru sedemikian sehingga diperoleh F_5.

(ii) $3F_5 - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$ untuk sebarang $e \in 3F_5$

Kasus 1, misalkan diberikan pewarnaan merah-biru λ pada sisi-sisi graf $3F_5$ seperti pada Gambar 4.102 dengan $E(F_5$-biru) di $3F_5$ adalah $v_{13}v_{14}$, $v_{13}v_{15}$, $v_{13}v_{16}$, $v_{13}v_{17}$, $v_{13}v_{18}$, $v_{14}v_{15}$, $v_{15}v_{16}$, $v_{16}v_{17}$, dan $v_{17}v_{18}$. Berdasarkan Lemma 4.1 misalkan $e \in E(F_5$-biru) di $3F_5$ maka $3F_5 - e \nrightarrow (3K_2, F_5)$.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa :

1. Diperoleh 13 graf F terhubung yang berorde antara 19-25 dan 1 graf F terhubung berdiameter 2 yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$.
2. Diperoleh graf tak terhubung $3F_5$ yang berada dalam $\mathcal{R}(3K_2, F_5)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Burr, S. A., Erdos, P., Faudree, R. J., dan Schelp, R. H., (1978b): *A Class of Ramsey-finite Graphs, Congressus Numer.,* 21, 171 – 180.

[2]. Burr, S. A., Erdos, P., dan Lovasz, L., (1976): On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria*, 1, 167 – 190.

[3]. Chartrand, G. dan Lesniak, L., 1986, *Graph and Digraph 2nd Edition*, California: Wadsworth, Inc.

[4]. Javaid, I., dan Shokat, S., 2008, *On The Partition Dimension of Some Wheel Related Graphs,* Prime Research in Mathematica 4: 154-164.

[5]. Mahfudiyah, L., 2008. Pelabelan *Graceful* pada kipas F_n dan kipas ganda dF_n, n bilangan asli dan $n \geq 2$. Skripsi tidak diterbitkan. Malang : FMIPA UIN Malang.

[6]. Mengersen, I dan Oeckermen, J., (1999): Mahtcing-star Ramsey Sets, *Discrete Applied Mathematics,* 95, 33 – 42.

[7]. Rosen K. H., 2003, *Discrete Mathematics And Its Applications Fifth Edition,* McGraw-Hill Companies, The New York.