

PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN EFEKTIF ENERGI RENDAH PADA MODEL DUNIA *BRANE* DENGAN MEDAN SKALAR *BULK*

Irsan Rahman

Program studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Muslim Maros, Jl. Dr. Ratulangi No. 62 Maros, Sulawesi Selatan 90511, Indonesia
Irsan@umma.ac.id

Abstrack: Einstein's Effective Low Energy Effective Fields in the Brane World Model with Bulk Scalar Fields. This research is an analytical study to obtain an effective Einstein field equation on the brane. The model used in this study is the braneworld model with the addition of scalar field in the bulk and brane with $4 + n$ dimensions. The brane Einstein field equation is obtained through the gradient expansion method or the low-energy limit approach. The Einstein field equation obtained by modifying the Einstein field equation in general relativity theory with an additional term X_ν^μ which is expected to behave as dark energy.

Keywords: braneworld, einstein field equation, dark energy, expansion method

Abstrak: Persamaan Medan Einstein Efektif Energi Rendah pada Model Dunia Brane dengan Medan Skalar Bulk. Penelitian ini adalah studi analitik untuk memperoleh persamaan medan Einstein efektif pada brane. Model yang digunakan dalam studi ini adalah model dunia brane dengan tambahan suku medan skalar pada bulk dan brane berdimensi $4 + n$. Persamaan medan Einstein brane diperoleh melalui pendekatan ekspansi gradient atau pendekatan limit energi rendah. Persamaan medan Einstein yang diperoleh memodifikasi persamaan medan Einstein dalam teori relativitas umum dengan suku tambahan X_ν^μ yang diharapkan berperilaku sebagai energi gelap.

Kata kunci: dunia brane, persamaan medan Einstein, energi gelap, ekspansi gradien

Dari hasil observasi *Supernova Tipe Ia* (SN Ia) yang dikumpulkan oleh *Supernova Cosmolgy Project Team* pada tahun 1998 menunjukkan bahwa alam semesta mengembang dipercepat (Riessdkk.,1998). Dalam persamaan gravitasi Einstein alam semesta yang mengembang dipercepat hanya mungkin terjadi jika alam semesta didominasi oleh suatu energi yang memiliki tekanan negatif, sebuah energi yang belum diketahui manusia. Energi yang tidak diketahui ini kemudian dinamakan sebagai Energi gelap (*Dark Energi*). Keberadaan energi gelap kemudian semakin diperkuat oleh data satelit *Wilkinson Microwave Anistropy Probe (WMAP)* pada 2011, yang menunjukkan bahwa komposisi alam semesta terdiri dari $(72,8 \pm 0,5)\%$ energi gelap (*dark energi*), $(22, \pm 1,4)\%$ materi gelap (*dark matter*), dan $(4,56 \pm 0,6)\%$ baryon (Jarosik dkk., 2011).

Untuk memahami energi gelap ini dikembangkan beberapa model. Salah satu model yang merepresentasikan dari modifikasi gravitasi adalah model *braneworld*. Model *braneworld* pertama kali diperkenalkan oleh Arkani-Hamed, dkk., pada tahun 1998, model ini dinamakan dengan model *ADD (Arkani-Hamed Dimopoulos-Dvali)* (Arkani-Hamed dkk., 1998). Model *braneworld* ini bertujuan untuk menjelaskan permasalahan hirarki dalam fisika partikel. Dalam model ini diperkenalkan dimensi ekstra dengan ukuran besar secara makroskopik dengan asumsi bahwa skala elektrolemah adalah skala fundamental dan massa Plank memiliki orde yang sama dengan skala ini. Tahun 1999 Randall dan Sundrum memperkenalkan dua buah model *braneworld* yang dinamakan Randall-Sundrum I (RS I) dan Randall-Sundrum II (RS II). Pada RS I, model *braneworld* ini terdiri dari dua buah *brane* yang masing-masing memiliki tegangan *brane* positif dan negatif yang diembed ke dalam

bulk anti de sitter (AdS) 5-dimensi. Dalam model ini semua medan materi terlokalisasi pada *brane* yang terletak pada titik-titik tetap. Pada RS II diperkenalkan model *braneworld* dengan satu buah *brane* bertegangan positif. Model ini dapat diperoleh dari model RS I dengan mengirim *brane* yang bellrtengan negatif ke titik tak hingga. (Randal dan Sundrum 1998; Randal dan Sundrum 1999).

Untuk memperoleh persamaan Einstein efektif pada *brane* ada dua pendekatan yang dilakukan yaitu melalui perumusan secara kurvatur kovarian dan metode ekspansi gradien. Pada tahun 2010 Shiromizu, dkk., melalui perumusan secara kurvatur kovarian diperoleh persamaan Einstein efektif pada *brane*. Persamaan Einstein efektif ini diperoleh dengan memproyeksikan medan-medan pada *bulk* 5-dimensi ke medan *brane* 4-dimensi melalui persamaan Gauss-Codazzi. Persamaan medan pada *brane* ini memodifikasi persamaan Einstein dalam relativitas umum dengan dua suku tambahan yaitu suku kuadratik tensor energi-momentum dan suku non-lokal dari proyeksi tensor Weyl 5-dimensi. Dengan adanya kontribusi medan *bulk* pada persamaan medan *brane* mengakibatkan persamaan medan pada *brane* menjadi tidak tertutup. Untuk membuat persamaan medan *brane* menjadi tertutup maka kita terlebih dahulu menyelesaikan persamaan medan Einstein pada *bulk* dan ini sulit untuk dilakukan (Shiromizu, dkk., 2010, Arianto 2011, Irsan 2019). Pada tahun 2002 Kanno dan Soda mengusulkan metode untuk memperoleh persamaan Einstein efektif pada *brane* dengan melakukan ekspansi gradien (*gradient expansion method*). Model ini menerapkan ekspansi perturbatif sebuah metrik dan mendefinisikan limit energi rendah sebagai limit dimana rapat energi materi pada *brane* lebih kecil dari tegangan *brane*. Kemudian persamaan medan 5-dimensi diselesaikan pada beberapa orde parameter perturbasi. Pada metode ini diperoleh persamaan medan Einstein pada *brane* yang tertutup karena suku tensor Weyl dapat dihilangkan secara langsung (Kanno dan Soda 2002).

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi analitik untuk memperoleh persamaan medan Einstein efektif pada model dunia *brane* dengan medan skalar pada *bulk*. Persamaan medan Einstein efektif diperoleh

dengan menerapkan metode ekspansi gradien (*gradient expansion method*). Pendekatan ini menerapkan ekspansi metrik dan mendefinisikan limit energi rendah yaitu limit dimana rapat energi materi pada *brane* lebih kecil dari tegangan *brane*.

Model Dunia Brane dengan Medan Skalar pada Bulk

Model dunia *brane* yang digunakan dalam studi ini adalah model dunia *brane* dengan dimensi *brane* $4 + n$ dimensi dan pada *bulk* terdapat suku medan skalar, yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$S = \int d^{4+n}x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - U(\phi) \right] + \int d^{5+n}y \sqrt{-h} [-\sigma(\phi) + L_m]_{y=0} \quad (1)$$

dimana g dan h masing-masing metrik pada *brane* dan *bulk*. R adalah skalar Ricci, ϕ adalah medan skalar, U adalah potensial skalar, σ adalah tegangan *brane* dan L_m adalah lagrangian materi pada *brane*. *Brane* diletakkan pada pada koordinat $y = 0$ *bulk*.

Sistem koordinat yang dipilih dalam penelitian ini yaitu

$$ds^2 = dy^2 + g_{\mu\nu}(x, y) dx^\mu dy^\nu \quad (2)$$

dan betuk potensial skalar dan tegangan *brane*

$$U(\phi) = -\frac{(4+n)(3+n)}{\kappa^2 l^2} + V(\phi) \quad (3)$$

$$\sigma(\phi) = \sigma_0 + \tilde{\sigma}(\phi) \quad (4)$$

Metode Ekspansi Gradien

Metode ekspansi gradien adalah sebuah pendekatan energi rendah dengan mendefinisikan rapat energi *brane* (ρ) lebih kecil dibanding tegangan *brane* (σ), $\rho \ll \sigma$. Dimana parameter dapat dituliskan

$$\epsilon = \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (5)$$

dimana l adalah kurvatur skalar *bulk* dan L kurvatur skala pada *brane*.

Kurvatur ekstrinsik dapat dibongkar menjadi bagian *traceless* dan *tracepart* menjadi

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu, \gamma} = \Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{4+n} g_{\mu\nu} Q \quad (6)$$

dimana $\Sigma_{\mu\nu}$ dan Q masing masing bagian *traceless* dan *tracepart* dari kurvatur ekstrinsik.

HASIL DAN DISKUSI

Variasi persamaan (1) terhadap diperoleh persamaan medan Einstein $5+n$ dimensi

$$\mathcal{G} = \kappa^2 T_{ab} + \kappa^2 \delta_a^\mu \delta_b^\nu (-\sigma g_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \delta(y) \quad (7)$$

dimana

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} g^{cd} \nabla_c \phi \nabla_d \phi - U(\phi) \right) \quad (8)$$

Dengan menggunakan persamaan (6) dan persamaan (7) diperoleh

$$\frac{3+n}{4+n} Q^2 - \Sigma_\beta^\alpha \Sigma_\alpha^\beta = R - \kappa^2 \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \kappa^2 (\partial_y \phi)^2 + 2\kappa^2 U(\phi) \quad (9)$$

$$\nabla_\alpha \Sigma_\mu^\alpha - \frac{3+n}{4+n} \nabla_\mu Q = -\kappa^2 \partial_y \phi \nabla_\mu \phi \quad (10)$$

$$\Sigma_{\nu,y}^\mu - Q \Sigma_\nu^\mu = -[R_\nu^\mu - \kappa^2 \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi]_{traceless} \quad (11)$$

Solusi pada Orde 0

Pada orde 0 materi diabaikan atau *brane* vakum. Solusi untuk orde yang lebih tinggi berarti melakukan perturbasi pada solusi vakum dengan menambahkan materi pada *brane*. Pada orde 0 persamaan (9)-(11) menjadi

$$\frac{3+n}{4+n} {}^{(0)}Q^2 + {}^{(0)}\Sigma_\beta^\alpha {}^{(0)}\Sigma_\alpha^\beta = \frac{(4+n)(3+n)}{l^2} \quad (12)$$

$$\nabla_\alpha {}^{(0)}\Sigma_\mu^\alpha - \frac{3+n}{4+n} \nabla_\mu {}^{(0)}Q = 0 \quad (13)$$

$${}^{(0)}\Sigma_{\nu,y}^\mu - {}^{(0)}Q {}^{(0)}\Sigma_\nu^\mu = 0 \quad (14)$$

Dari defenisi kurvatur ekstrinsik diperoleh metric orde ke nol

$${}^{(0)}g_{\mu\nu}(y, x^\mu) = b^2(y) h_{\mu\nu}(x^\mu) \\ b(y) = e^{y/l} \quad (15)$$

ekspansi metrik dan medan skalar dituliskan

$$g_{\mu\nu}(y, x^\mu) = b^2(y) \left[h_{\mu\nu}(x^\mu) {}^{(1)}g_{\mu\nu}(y, x^\mu) + {}^{(2)}g_{\mu\nu}(y, x^\mu) + \dots \right] \quad (16)$$

$$\phi(y, x^\mu) = \eta(x^\mu) + {}^{(1)}\phi(y, x^\mu) + {}^{(2)}\phi(y, x^\mu) + \dots \quad (17)$$

1.1 Solusi Ord ke-1

Untuk solusi orde ke-1 persamaan (9) dan (11) memberikan solusi

$${}^{(1)}Q = \frac{l}{2(3+n)b^2} (R(h) - \kappa^2 \phi'^\alpha \phi_{,\alpha}) - \frac{l\kappa^2}{3+n} V(\eta) \quad (18)$$

$${}^{(1)}\Sigma_\nu^\mu = \frac{l}{(2+n)b^2} [R_\nu^\mu(h) - \kappa^2 \phi'^\mu \phi_{,\nu}]_{traceless} + \frac{X_\nu^\mu}{b^{4+n}} \quad (19)$$

dimana $R(h)$ adalah skalar ricci pada *brane* dan X_ν^μ adalah konstanta integrasi. Syarat *junction* untuk orde ke-1 dapat dituliskan

$$\left[{}^{(1)}\Sigma_\nu^\mu - \frac{3+n}{4+n} \delta_\nu^\mu {}^{(1)}Q \right]_{y=0} = -\frac{\kappa^2}{2} \delta_\nu^\mu \tilde{\sigma} + \frac{\kappa^2}{2} T_\nu^\mu \quad (20)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (18) dan (19) ke persamaan (20) diperoleh persamaan medan Einstein *brane* efektif

$$G_\nu^\mu = \frac{(2+n)}{2l} \kappa^2 T_\nu^\mu + \kappa^2 \left(\eta'^\mu \eta_{,\nu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \eta'^\alpha \eta_{,\alpha} - \delta_\nu^\mu V_{eff} \right) - \frac{2+n}{l} X_\nu^\mu \quad (21)$$

dengan

$$V_{eff} = \frac{(2+n)}{4+n} V(\eta) - \frac{(2+n)}{2l} \tilde{\sigma} \quad (22)$$

Persamaan (21) di atas adalah persamaan medan Einstein pada *brane*. persamaan tersebut berbeda dengan persamaan medan Einstein standar dengan suku X_ν^μ sebagai suku modifikasi. Suku modifikasi ini diharapkan berperilaku sebagai *energi* gelap yang akan dikaji di studi selanjutnya.

KESIMPULAN

Persamaan medan Einstein *brane* yang diperoleh dari metode ekspansi gradien ini adalah persamaan medan Einstein yang tertutup karena persamaan medan Einstein telah dituliskan dalam besaran-besaran pada *brane*. selain itu persamaan medan yang diperoleh memodifikasi persamaan medan Einstein dalam teori relativitas umum dengan suku tambahan X_ν^μ . Suku tambahan ini diharapkan mampu berperilaku sebagai *energi* energi gelap yang akan ditinjau dalam kajian berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Amendola, L., and Tsujikawa, S., (2010): *Dark Energi: Theory and Observations*, Cambridge University Press. New York.
- Arianto, Zen, F.P., Feranie, S., Widiatmika, I.P., and Gunara, B.E. (2011): *KaluzaKlein brane cosmology with a bulk scalar field*, Physical Review D 84 044008
- Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S. and Dvali, G. (1998): *The Hierarchy Problem and New Dimension at a Millimeter*, Physics Letter B, 429, 263
- Kanno, S. and Soda, J. (2002): *Radion and Holographic Brane Gravity*, Physical Review D 66 083506.
- Rahman, I., Bangsawang, B.J. Suroso, A., Surungan, T., Zen, F.P. (2019): *Dynamical System of Kaluza-Klein*

Brane Cosmology with Gauss-Bonnet term in a *Bulk*, IOP conf. series, 1204 012010

Randall, L., and Sundrum, R (1999): A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *Physics Review Letter*, 83,3370.

_____ (1999): An Alternative to Compactification, *Physics Review Letter*, 83,4690.

Riess, A.G., Filippenko, A.V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P.M., Gilliland, R.L., Hogan, C.J., Jha, S., Kirshner, R.P., Leibundgut, B., Phillips, M.M., Reiss, D., Schmidt, B.P., Schommer, R.A., Smith, R.C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Sunzef, N.B., dan Tonry, J. (1998): Observational Evidence from Supernova for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astrophysics Journal*, 116, 1009

Spergel, D.N., Verde, L., Peiris, H.V., Komatsu, E., Nolte, M.R., Bennett, C.L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, N., Meyer, S.S., Page, L., Tucker, G.S., Weiland, J.L., Wollack, E., Wright, E.L., (2003): First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmology Parameters, *Astrophysics Journal Supplement* 148 175.

Shiromizu, T., Maeda, K. and Sasaki, M (2000): The Einstein Equation *3braneworld*, *Physical Review D* 62 024012.

Suroso, A., Zen, F.P., Arianto, _____ and Gunara, B.E. (2012): AIP Conference Proceeding 1450 338.