Jurnal Sainstek Vol. IV No.1: 1-5, Juni 2012 ISSN: 2085-8019

TRANSLASI AUSLANDER-REITEN

Ika Metiza Maris

Program Studi Tadris Matematika STAIN Batusangkar
Jl. Sudirman No. 137 Kuburajo Lima Kaum Batusangkar, Sumatera Barat-27213
Email: ikametizamaris@yahoo.com

ABSTRAK

Auslander-Reiten sequences in $mod\ A$, where A is finite dimensional K-algebra, is a particular form of short exact sequences of right A-module. The existence of this sequence in $mod\ A$ is far from obvious. To see the presence of this sequence, we need to know Auslander-Reiten translations, as a functor composition between standart duality and transpotision. This sequences is useful in representation theory of algebras especially in formation of Auslander-Reiten Quiver. This paper will discuss about Auslander-Reiten translation and how to construct Auslander-Reiten translation from a module. . In the end of this paper we will see about main properties of this translation.

Key words : Auslander-Reiten translation, Auslander-Reiten sequences, Functor, Projective module

PENDAHULUAN

Salah satu bentuk barisan yang terdapat di struktur modul adalah Barisan Auslander-Reiten. Barisan Auslander-Reiten adalah bentuk khusus dari bentuk barisan eksak. Barisan ini diperkenalkan oleh Auslander (Auslander, 1974) dan Auslander dan Reiten (Auslander dan Reiten, 1975; Auslander dan Reiten, 1977). Dengan memanfaatkan Translasi Auslander-Reiten sebagai komposisi fungtor dualitas standar dengan fungtor transpor, maka keberadan Barisan Auslander-Reiten dapat dideteksi pada $mod\ A$.

Tulisan ini merupakan studi literatur yang merupakan pembahasan mendalam dari Teori Auslander-Reiten pada (Assem dkk, 2005). Sistematika pembahasan adalah sebagai berikut: pada bagian pertama akan dibahas mengenai Transposisi Modul sebagai metode untuk mengkonstruksi translasi Auslander-Reiten, bagian berikutnya akan diperlihatkan secara jelas bentuk translasi Auslander-Reiten beserta properti utamanya.

TRANSLASI AUSLANDER-REITEN

1. Transposisi Modul

Pada tulisan ini, kecuali dinyatakan sebelumnya, diasumsikan K sebagai lapangan yang tertutup secara aljabar yng berdimensi hingga. Selanjutnya $mod\ A$ merupakan notasi dari Kategori abel dari semua $A-$ modul kanan, yaitu kategori objeknya adalah $A-$modul kanan, morfismanya adalah homomorfisma $A-$ modul dan komposisi morfismanya merupakaan komposisi pemetaan. Kategori $mod\ A^{op}$ diidentifikasikan sebagai kategori semua $A-$ modul kiri. Fungtor merupakan bentuk pemetaan dari suatu kategori ke kategori lainnya.

Definisi 1.1

Fungtor $A-$dual didefinisikan sebagai :

$$(-)^t = Hom_A(-, A) : mod\ A \longrightarrow mod\ A^{op}$$

Fungtor $(-)^t$ menyebabkan dualitas antara kategori $A-$modul kanan projektif $(proj\ A)$ dan $A-$modul kiri projektif $(proj\ A)$. Penerapan fungtor ini dapat dilihat pada barisan eksak berikut :

Misalkan barisan eksak berikut:

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

merupakan presentasi projektif minimal dari M, sedemikian hingga $p_0 : P_0 \longrightarrow M$ dan

$p_1: P_1 \longrightarrow Ker$ adalah penutup projektif. Dengan menerapkan fungtor $(-)^t$ yang kontravarian dan eksak kiri, maka akan diperoleh barisan eksak dari sebagai berikut:

$$0 \longrightarrow M_t \xrightarrow{p_0^t} {P_0}^t \xrightarrow{p_1^t} {P_1}^t \longrightarrow Coker\, p_1^t \longrightarrow 0$$

Selanjutnya $Coker\, p_1^t$ dinotasikan dengan $Tr\, M$ dan lebih dikenal dengan transpos dari M. Transpos ini sangat berguna untuk melakukan tranlasi Auslander-Reiten.

Berikut akan diperlihatkan sifat utama dari Transpos Tr.

Proposisi 1.2

Misalkan M adalah modul tak terdekomposisi di $mod\, A$

1. A −modul kiri $Tr\, M$ tidak mempunyai suku langsung projektif tak nol
2. Jika M bukan projektif, maka barisan

$$ {P_0}^t \xrightarrow{p_1^t} {P_1}^t \longrightarrow Tr\, M \longrightarrow 0$$

yang diperoleh dari presentasi projektif minimal

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

dari M adalah presentasi projektif minial dari A −modul kiri $Tr\, M$.

3. Modul M projektif jika dan hanya jika $Tr\, M = 0$. Jika M tidak projektif maka $Tr\, M$ tak terdekomposisi dan $Tr\, M(Tr\, M) \cong M$
4. Jika M dan N adalah non projektif tak terdekomposisi, maka $M \cong N$ jika dan hanya jika $Tr\, M \cong Tr\, N$

Bukti:

Misalkan M projektif tak terdekomposisi. Maka p_1 tak terdekomposisi, akibatnya p_1^t tidak terdekomposisi. Lebih lanjut menyebabkan $Coker\, p_1^t = Tr\, M$ juga tidak terdekomposisi.

Kemudian dengan menggunakan fungtor $(-)^t$ pada barisan yang diberikan di (2), akan diperoleh diagram komutatif berikut ini:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\varepsilon_{P_1}"', "\cong"] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\varepsilon_{P_0}"', "\cong"] & M \arrow[r] & 0 \\
P_1'' \arrow[r, "p_1''"] & P_0'' \arrow[r, "p_0''"] & Tr\, Tr\, M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dengan memanfaatkan *five lemma* pada diagram diatas, diperoleh $Tr\, Tr\, M \cong M$ yang menyebabkan diagram tersebut komutatif. ■

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, dapat dinyatakan bahwa Tr memetakan modul di $mod\, A$ ke modul di $mod\, A^{op}$, tapi tidak mendefinisikan dualias $mod\, A \longrightarrow mod\, A^{op}$, karena pemetaan tersebut menolkan modul projektif. Untuk menjadikan korespondensi tersebut sebuah dualitas, perlu menolkan modul projektif dari $mod\, A$ dan $mod\, A^{op}$. Ini merupakan motivasi untuk konstruksi kategori berikutnya.

Definisi 1.3

Misalkan $\mathcal{P}$ adalah ideal di kategori $mod\, A$. Didefinisikan kategori kuosien

$$\underline{mod}\, A = (mod\, A)/\mathcal{P}$$

disebut kategori stabil projektif.

Objek dari $\underline{mod}\, A$ adalah objek yang sama dengan $mod\, A$, tetapi morfisanya didefinisikan sebagai ruang vektor kuosien

$$\underline{Hom}_A(M,N) = Hom_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$$

dari $Hom_A(M,N)$ dengan komposisi dari morfismanya diperoleh dari komposisi morfisma di $mod\, A$. Dari definisi ini dapat dinyatakan bahwa fungtor $mod\, A \longrightarrow \underline{mod}\, A$ adalah pemetaan identitas pada objeknya dan homomorfisma $f: M \longrightarrow N$ di $mod\, A$ bersesuaian dengan homomorfisma di $Hom_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$ pada $\underline{mod}\, A$. Jadi meskipun korespondensi $M \longmapsto Tr\, M$ tidak mendefinisikan dualitas antara $mod\ A \longrightarrow mod\ A^{op}$, korespondensi ini dapat menyebabkan dualitas antara $\underline{mod}\ A$ dan $\underline{mod}\ A^{op}$.

Proposisi 1.4

Misalkan $M \longmapsto Tr\ M$ suatu korespondensi maka terdapat fungtor dualitas $K-linier\ Tr: \underline{mod}\ A \longrightarrow \underline{mod}\ A^{op}$.

Dualitas Tr yang didefinisikan di proposisi 1.4 disebut **transposisi**. Dualitas ini mengubah $A-$ modul kanan menjadi A −modul kiri dan sebaliknya. Selanjutnya, jika akan didefinisikan suatu endofungtor di $mod\ A$, maka Tr harus dikomposisikan dengan dualitas standar $D = Hom_K(-, K)$.

2. Translasi Auslander-Reiten

Pada bagian ini akan ditunjukkan metode konstruksi Translasi Auslander-Reiten dari suatu modul yang diketahui dan beberapa properti penting dari translasi tersebut.

Sebelumnya akan dipaparkan definisi dari Translasi Auslander-Reiten.

Definisi 2.1

Translasi Auslander-Reiten adalah komposisi dari D dengan Tr, dinotasikan

$$\tau = DTr$$

dan didefinisikan juga

$$\tau^{-1} = TrD$$

Pada proposisi berikutnya akan diperlihatkan metode untuk mengkonstruksi translasi Auslander-Reiten dari suatu modul yang diketahui. Pada pembuktian proposisi ini dibutuhkan suatu fungtor yang dikenal dengan fungtor Nakayama.

Proposisi 2.2

Misalkan

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

adalah presentasi projektif minimal dari M $A-modul$. Maka terdapat barisan eksak

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0$$

Bukti:

Misalkan

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

adalah presentasi projektif minimal dari M $A-modul$. Terapkan fungtor $(-)^t$, sehingga diperoleh

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{p_0'} P_0' \xrightarrow{p_1'} P_1' \longrightarrow \text{Coker } p_1' \longrightarrow 0$$

Kemudian dengan menggunakan fungtor D, diperoleh

$$0 \longrightarrow DTrM \longrightarrow DP_1' \xrightarrow{Dp_1'} DP_0' \xrightarrow{Dp_0'} DM' \longrightarrow 0$$

Dan akhirnya berdasarkan definisi Fungtor Nakayama didapatkan

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0$$

∎

Proposisi 2.3

Misalkan

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$$

adalah presentasi injektif minimal dari N $A-modul$. Maka terdapat barisan eksak

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}N \xrightarrow{\nu^{-1}i_0} \nu^{-1}E_0 \xrightarrow{\nu^{-1}i_1} \nu^{-1}E_1 \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$$

Pada teorema berikut akan diperlihatkan properti dasar dari Translasi Auslander-Reiten yang merupakan hasil utama dari tulisan ini.

Teorema 2.4

Misalkan N dan M adalah modul tak terdekomposisi di $mod\ A$

1. Modul τM adalah nol jika dan hanya jika M adalah projektif
2. Modul $\tau^{-1}N$ adalah nol jika dan hanya jika N adalah injektif.
3. Jika M adalah modul nonprojektif, maka τM adalah noninjektif tak terdekomposisi dan $\tau^{-1}\tau M \cong M$.
4. Jika N adalah modul noninjektif, maka $\tau^{-1}N$ adalah nonprojektif tak terdekomposisi dan $\tau\tau^{-1}N \cong N$.
5. Misalkan N dan M adalah modul nonprojektif, maka $M \cong N$ jika dan hanya jika $\tau M \cong \tau N$.
6. Misalkan N dan M adalah modul noninjektif, maka $M \cong N$ jika dan hanya jika $\tau^{-1}M \cong \tau^{-1}N$.

Bukti:

Misalkan M projektif maka $TrM = 0$. Akibatnya $DTrM = Hom_K(TrM, K)$ adalah nol. Jadi $DTrM = \tau M$ adalah nol. Selanjutnya misalkan $\tau M = 0$. Karena $DTrM = \tau M$, maka $TrM = 0$. Akibatnya M projektif.

Misalkan N adalah injektif. Karena $D(N)$ adalah projektif maka $TrD(N)$ adalah nol. Jadi $TrD(N) = \tau^{-1}N$ adalah nol. Misalkan $\tau^{-1}N$ adalah nol. Karena $TrD(N) = \tau^{-1}N$, maka $D(N)$ adalah projektif. Akibatnya N adalah injektif.

Misalkan M adalah modul nonprojektif, maka TrM tak terdekomposisi dan berdasarkan definisi fungtor diperoleh $DTrM = \tau M$ dalah noninjektif. Selanjutnya, karena

$$\begin{aligned}\tau^{-1}\tau M = \tau^{-1}(DTr)M &= TrD(DTr)M \\ &= TrDDTrM \cong TrTRM \cong M\end{aligned}$$

maka $\tau^{-1}\tau M \cong M$.

Misalkan N adalah modul noninjektif, maka $D(N)$ adalah nonprojektif dan $TrD(N) = \tau^{-1}N$ tak terdekomposisi . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\tau\tau^{-1}N = \tau(TrD)N &= DTr(TrD)N \\ &= D\big(TrTr(DN)\big) \cong DD\,N \\ &\cong N\end{aligned}$$

Akibatnya $\tau\tau^{-1}N \cong N$ sehingga $\tau M \cong \tau N$.

Misalkan adalah modul nonprojektif. Berdasarkan proposisi (1.2) diperoleh $M \cong N$ jika dan hanya jika $Tr\ M \cong Tr\ N$, akibatnya $DTrM \cong DTrN$.

Misalkan N dan M adalah modul noninjektif. Karena $D(M)$ dan $D(N)$adalah non projektif sehingga $D(M) \cong D(N)$ jika dan hanya jika $TrD(M) \cong TrD(N)$. Akibatnya $\tau^{-1}M \cong \tau^{-1}N$.

■

KESIMPULAN

Pada tulisan ini telah dibahas mengenai Translasi Auslandr-Reiten yang didefinisikan sebagai komposisi dari D dengan Tr, dinotasikan

$$\tau = DTr$$

Selain itu juga telah diperlihatkan metode untuk mengkonstruksi Translasi Auslander-Reiten dari suatu modul yang diketahui. Juga beberapa properti penting dari translasi ini.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih diucapkan kepada DR. Muchtadi Intan Detiena atas bimbingan dan motivasinya dalam penyelesaian tulisan ini.

 ISSN: 2085-8019

DAFTAR PUSTAKA

Assem I, Simon D and Skowronski A. 2005. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math.Soc. Students Text 65, Cambridge University Press.

Auslander M and Reiten I. 1975. *Representation theory of Artin Algebras III, Comm. Algebra*, 3: 269-310.

Auslander M dan Reiten I. 1977. *Representation theory of Artin Algebras IV: Invariant given by Almost Split Sequences, Comm. Algebra*, 5: 443-518.

Auslander M, Reinten I and Smaloe S. 1995. *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, New York.

Auslander M. 1974. *Representation theory of Artin Algebras II, Comm. Algebra*, 1: 269-310