

Simulasi Model Matematika Dispersi Larutan Limbah Pada Saluran Air

Zeth Arthur Leleury¹, Berny Pebo Tomasouw²

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, zetharthur82@gmail.com

²Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, bptomasouw@gmail.com

DOI 10.31102/zeta.2019.4.2.28-33

ABSTRACT

Water pollution is now a condition that needs special attention. One source of water pollution comes from waste solutions that produce pollutants that can reduce water quality. The Chemical Oxygen Demand (COD) number is a parameter used to measure waste pollution. The purpose of this research is to examine the effect of flow velocity and rate of change of substances on COD concentrations. The method used in this research is a finite difference method to express the discrete form of a mathematical model of the dispersion of a waste solution in a water channel. The results show that the greater the flow velocity, the lower the COD concentration and the greater the rate of change in the concentration of substances, the higher the COD concentration. So, if the COD is high then the water quality is not good to use or in other words the water can be said to be polluted.

Keywords: *Mathematical Model, Dispersion, COD, Finite Difference Method*

ABSTRAK

Pencemaran air saat ini merupakan suatu kondisi yang perlu mendapatkan perhatian khusus. Salah satu sumber pencemaran air tersebut berasal dari larutan limbah yang menghasilkan polutan yang dapat menurunkan kualitas air. Angka Chemical Oxygen Demand (COD) merupakan parameter yang digunakan untuk pengukuran pencemaran limbah. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji pengaruh kecepatan aliran dan laju perubahan zat terhadap konsentrasi COD. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode beda hingga untuk menyatakan bentuk diskrit model matematika dispersi larutan limbah pada saluran air. Hasil penelitian menunjukkan bahwa semakin besar kecepatan aliran maka semakin rendah konsentrasi COD dan semakin besar laju perubahan konsentrasi zat maka semakin tinggi konsentrasi COD. Sehingga jika COD tinggi maka kualitas air itu tidak baik untuk digunakan atau dengan kata lain air tersebut dapat dikatakan tercemar.

Kata Kunci: *Model Matematika, Dispersi, COD, Metode Beda Hingga*

1. PENDAHULUAN

Air merupakan kebutuhan dasar dan utama bagi seluruh makhluk hidup di muka bumi. Air dengan kualitas baik merupakan hal penting yang harus dipenuhi guna kelangsungan dan kelestarian makhluk hidup. Fungsi air bagi kehidupan tidak dapat digantikan oleh senyawa lain. Seiring dengan meningkatnya aktivitas manusia terhadap penggunaan air, menyebabkan perubahan pada kualitas air. Senyawa atau unsur yang dilarutkan oleh air disebut zat hidrofilik dan zat hidrofobik. Air memiliki karakteristik fisika, kimia dan biologis yang sangat mempengaruhi kualitas air tersebut. Sebagian besar dari air alami, air domestik dan air industri mengandung zat organik. Meskipun dalam konsentrasi yang rendah, zat organik dapat menyebabkan penurunan kadar oksigen dalam air. Hingga kini, COD merupakan faktor kimia yang dapat menunjukkan tingkat pencemaran air yang terkontaminasi oleh polutan reduktif dan sekaligus merupakan salah satu parameter penting dalam pemantauan kualitas air (Jinjun, 2008). COD merupakan banyaknya oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi semua material organik menjadi karbondioksida dan air (Gholizadeh, 2016).

Pada beberapa penelitian sebelumnya, telah dilakukan penelitian model regresi perubahan kualitas air di daerah aliran sungai (Fadlilillah, 2010), pemodelan kualitas air dengan parameter BOD dan DO pada sungai ciliwung (Budiman, 2010), diskritisasi model kualitas air pada *natural stream* berbasis elemen hingga (Ahsan, 2013) dan analisis model matematika proses penyebaran limbah cair pada air tanah menggunakan metode volume hingga (Fatahilla, 2015). Pada penelitian ini diberikan suatu model matematika dispersi penyebaran polutan. Dari model matematika tersebut, maka dicari bentuk diskrit dan solusi numerik untuk mengukur konsentrasi COD menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang dapat diterapkan untuk kasus fenomena transport di perairan air dangkal dan aliran air tanah yang biasanya dinyatakan dengan persamaan Adveksi Diffusi karena metode ini dapat memberikan hasil pendekatan yang cukup akurat (Ribal, 2008). Ide utama yang melatarbelakangi munculnya metode beda hingga dalam memperoleh solusi persamaan differensial parsial adalah sebuah solusi pendekatan yang sering dikenal sebagai pendekatan Deret Taylor (Zuhair, 2008). Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji pengaruh kecepatan aliran dan laju perubahan zat terhadap konsentrasi COD.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dispersi Pada Suatu Saluran Air

Pada transportasi larutan dalam suatu saluran air, dispersi digunakan sebagai penyebaran partikel pada keadaan air yang sedang mengalir. Dispersi

COD digambarkan oleh persamaan konveksi-difusi dalam domain $[a, b]$ sebagai berikut:

$$-D_x \frac{d^2c}{dx^2} + u \frac{dc}{dx} + RC - Q = 0 \quad (1)$$

dimana:

$C(x)$ merupakan konsentrasi dari COD pada titik $\in [a, b](kg/m^3)$, u merupakan adalah kecepatan aliran dalam arah $x (m/s)$, D_x merupakan koefisien difusi (m/s^2) , R merupakan laju peluruhan zat (s^{-1}) , dan Q adalah laju perubahan konsentrasi zat (kg/m^3s) .

(Pochai, 2006)

2.2 Metode Beda Hingga

Metode ini digunakan untuk memecahkan persamaan differensial biasa secara numerik, dengan menggunakan deret Taylor yang diputus pada orde tertentu sesuai kebutuhan yang ada (Luknanto, 2003).

Bentuk Umum Deret Taylor

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i + \Delta x) \\ &= f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + \\ &\quad f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + f^n(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \end{aligned}$$

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi yang benar jika semua deret diperhitungkan. Dalam prakteknya hanya beberapa suku saja yang diperhitungkan sehingga tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Sehingga terdapat kesalahan (*error*) yang disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error*) R_n yang ditulis:

$$\begin{aligned} R_n &= O(\Delta x^{n+1}) \\ &= f^{n+1}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{n+2}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

Ada 3 jenis metode beda hingga dalam pendekatan differensial yaitu:

a. Forward Difference (Beda Maju)

Jika data yang digunakan adalah titik x_i dan x_{i+1} maka disebut beda maju yang dapat dituliskan dalam bentuk yang sama dengan deret Taylor yaitu:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i + \Delta x) \\ &= f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + \\ &\quad f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + f^n(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \end{aligned}$$

Untuk menghitung diferensial turunan pertama dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor, yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - O(\Delta x) \end{aligned}$$

b. Backward Difference (Beda mundur)

Jika data yang digunakan adalah titik x_i dan x_{i-1} maka disebut beda mundur yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x) &= f(x) + f'(x_i) \frac{(-\Delta x)}{1!} + f''(x_i) \frac{(-\Delta x)^2}{2!} + \\ &\quad f'''(x_i) \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \dots + f^n(x_i) \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x_i)\Delta x + f''(x_i)\frac{(\Delta x)^2}{2!} - f'''(x_i)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots - f^n(x_i)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Untuk perhitungan differensial pertama dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor, yang dapat diturunkan berdasar deret Taylor, yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

c. Central Difference (beda pusat)

Jenis beda ketiga ialah beda pusat digunakan jika data yang digunakan adalah titik x_{i+1} dan x_{i-1} . untuk perhitungan differensial turunan pertama dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor. Dengan mengurangi deret Taylor pada persamaan beda maju dengan persamaan deret Taylor pada beda mundur, yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)\Delta x + 2f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + 2f^n(x_i)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} - f'''(x_i)\frac{(\Delta x)^2}{3!}$$

Dapat ditulis sebagai :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} - O(\Delta x^2)$$

Bila differensialnya sampai orde 2, $f''(x_i)$, maka uraian deret Taylor sampai orde 2 kemudian dijumlahkan :

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + 2f''(x_i)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + 2f^{(4)}(x_i)\frac{(\Delta x)^4}{4!} + \dots$$

atau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2)$$

3. METODE PENELITIAN

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mendiskritisasi model matematika dispersi polutan pada saluran air, mencari solusi numerik dari model matematika dispersi polutan tersebut, melakukan simulasi dengan bantuan *software* Matlab, analisis hasil simulasi, dan membuat kesimpulan hasil simulasi.

4. HASIL PENELITIAN

4.1. Diskritisasi Model Matematika Dispersi Larutan Limbah Pada Saluran Air

Persamaan (1) konveksi-difusi dalam domain $[a,b]$ dapat ditulis sebagai

$$D_x C'' = uC' + RC - Q$$

Sehingga $c'' = \frac{uC'+RC-Q}{D_x}$ dapat digambarkan persamaan konveksi difusi dalam bentuk Persamaan:

$$c'' = p(x)c' + q(x)c + r(x) \quad (2)$$

dengan $p(x) = \frac{u}{D_x}$, $q(x) = \frac{R}{D_x}$, $r(x) = -\frac{Q}{D_x}$

Untuk perhitungan numerik maka dalam penelitian ini dipilih bilangan bulat $m > 0$ dan membagi interval $[a,b]$. Dengan metode beda hingga, akan ditentukan grid fungsi dari nilai $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1}$ dengan c_i merupakan aproksimasi solusi $c(x_i)$, $c_0 = a$ dan $c_{m+1} = b$. Disini $x_i = a + ih$ dan $h = \Delta x = \frac{b-a}{m+1}$ merupakan jarak diantara grid point. Pada titik interior x_i , untuk $i = 1, 2, \dots, m$, persamaan diferensial untuk didekati adalah:

$$c''(x_i) = p(x_i)c' + q(x_i)c(x_i) + r(x_i) \quad (3)$$

Deret Taylor polinomial ketiga pada x_i didekati pada x_{i+1} dan x_{i-1} , diketahui:

$$c(x_{i+1}) = c(x_i + h)$$

$$= c(x_i) + hc'(x_i) + \frac{h^2}{2}c''(x_i) + \frac{h^3}{6}c'''(x_i) + \frac{h^4}{24}c^{(4)}(x_i) \quad (4)$$

dan

$$c(x_{i-1}) = c(x_i - h)$$

$$= c(x_i) - hc'(x_i) + \frac{h^2}{2}c''(x_i) - \frac{h^3}{6}c'''(x_i) + \frac{h^4}{24}c^{(4)}(x_i) \quad (5)$$

Diasumsikan $c \in [x_{i+1}, x_{i-1}]$. Jika persamaan (4) dan (5) dijumlahkan kemudian dilakukan manipulasi aljabar maka diperoleh persamaan berikut:

$$c''(x_i) = \frac{1}{h^2} [c(x_{i+h}) - 2c(x_i) + c(x_{i-1}))] - \frac{h^2}{12}c^{(4)}(x_i) \quad (6)$$

Suatu rumusan beda pusat untuk $c'(x_i)$ diperoleh dengan cara yang sama sehingga diperoleh yakni :

$$c'(x_i) = \frac{1}{2h} [c(x_{i+1}) - c(x_{i-1}))] - \frac{h^2}{6}c'''(x_i) \quad (7)$$

Dengan menggunakan Persamaan (6) dan (7) yang disubstitusikan ke persamaan (3) maka diperoleh:

$$\frac{c(x_{i+1}) - 2c(x_i) + c(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i) \left[\frac{c(x_{i+1}) - c(x_{i-1}))}{2h} \right] + q(x_i)c(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12} [2p(x_i)c'''(x_i) - c^{(4)}(x_i)] \quad (8)$$

Suatu metode beda hingga dengan pemotongan galat dari order $O(h^2)$ dihasilkan dengan menggunakan persamaan (8) dengan kondisi nilai batas

$$c(a) = c \text{ dan } c'(b) = T_0$$

$$k_0 = c_0 \quad (9)$$

$$k_{m+1} = 2h\beta + k_{m-1} \quad (10)$$

Dengan menggunakan metode beda-pusat, maka diperoleh:

$$\left(\frac{2k_i - k_{i+1} - k_{i-1}}{h^2}\right) + p(x_i)\left(\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}\right) + q(x_i)k_i = -r(x_i) \quad (11)$$

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)k_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))k_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)k_{i+1} = -h^2r(x_i) \quad (12)$$

dimana $w_i = c(x_i)$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$. Untuk $i = m$, substitusi persamaan (10) ke dalam persamaan (8), diperoleh:

$$w_{m+1} = 2h\beta + w_{m-1}$$

Karena $w_i = c(x_i)$, dengan demikian diperoleh:

$$(-2)k_{m-1} + (2 + h^2q(x_m))k_m = -h^2r(x_m) + (2 - hp(x_m))h\beta \quad (13)$$

Persamaan (12) sampai (13) dapat ditulis dalam bentuk matriks : $AK = B$ (14)

dimana :

$$A = \begin{bmatrix} (2+h^2q(x_1)) & -(1-\frac{h}{2}p(x_1)) & 0 & \dots & 0 \\ -(1+\frac{h}{2}p(x_1)) & (2+h^2q(x_2)) & -(1-\frac{h}{2}p(x_2)) & \dots & \vdots \\ 0 & -(1+\frac{h}{2}p(x_1)) & (2+h^2q(x_2)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & (2+h^2q(x_m)) \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{m-1} \\ k_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + (1 + \frac{h}{2}p(x_1))k_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -h^2r(x_m) + (2 - hp(x_m))h\beta \end{bmatrix}$$

4.2. Simulasi Model Matematika Dispersi

Dalam proses simulasi, dikaji pengaruh kecepatan aliran dan laju perubahan konsentrasi zat terhadap konsentrasi COD disetiap titik pada jarak tertentu.

4.2.1 Pengaruh Kecepatan Aliran Terhadap Konsentrasi COD

Asumsikan bahwa ada larutan limbah yang dibuang ke suatu saluran air dengan titik awal 0,0 km dan konsentrasi COD dari air limbah adalah $k_0 = 20 \text{ kg/m}^3$. Parameter fisik adalah sebagai berikut: Koefisien difusi $D_x = 10 \text{ m}^2/\text{s}$, Kecepatan aliran $u = (5-x) \text{ m/s}$, di mana $x \in [0,4]$, Laju peluruhan zat adalah $R = 3 \text{ s}^{-1}$ dan Laju perubahan Konsentrasi zat adalah $Q = 1 \text{ Kg/m}^3\text{s}$.

Persamaan Konveksi Difusi dalam bentuk Persamaan :

$$c'' = p(x)c' + q(x)c + r(x)$$

Sehingga koefisien variabel persamaan konveksi-difusi adalah:

$$p(x) = \frac{5-x}{10}$$

$$q(x) = \frac{3}{10}$$

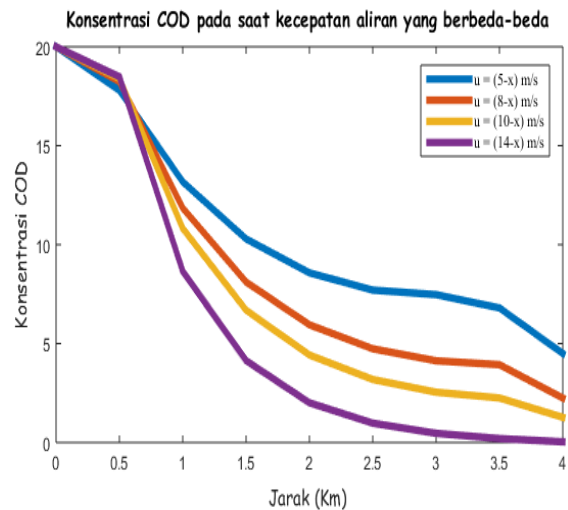
$$r(x) = -\frac{1}{10}$$

dengan $x \in [0,4]$ dan $h = 0.5$ sehingga jarak (x) dipartisi menjadi 9 bagian. Hasil aproksimasi terhadap konsentrasi COD disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Konsentrasi COD

Jarak (km)	Konsentrasi (kg/m ³)
0.0	20
0.5	17.7976
1.0	13.1731
1.5	10.2875
2.0	8.5758
2.5	7.7012
3.0	7.4731
3.5	6.8006
4.0	4.4967

Untuk mengkaji pengaruh kecepatan aliran terhadap konsentrasi COD maka pada penelitian ini diambil beberapa kecepatan yang berbeda-beda antara lain $(8-x) \text{ m/s}$, $(10-x) \text{ m/s}$, dan $(14-x) \text{ m/s}$,



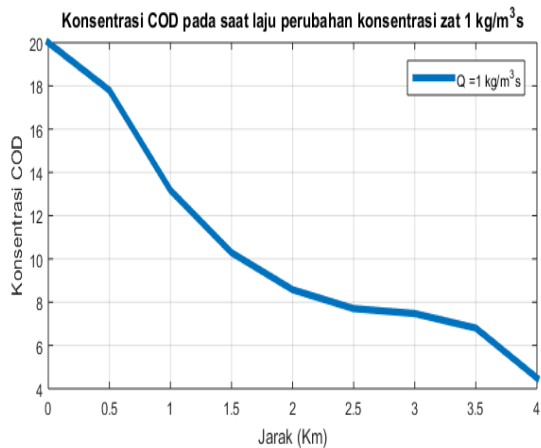
dimana parameter fisik lainnya tetap, maka hasil perhitungan konsentrasi COD pada kecepatan $(8-x) \text{ m/s}$, $(10-x) \text{ m/s}$, dan $(14-x) \text{ m/s}$, dapat disajikan pada Gambar 1 di bawah ini.

Gambar 1. Grafik konsentrasi COD dengan kecepatan aliran yang berbeda

Berdasarkan Gambar 1 di atas terlihat bahwa konsentrasi COD sepanjang saluran mengalami penurunan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kecepatan aliran sangat berpengaruh terhadap konsentrasi COD.

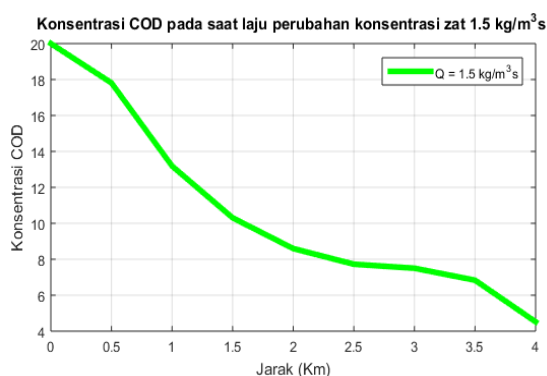
4.2.2 Pengaruh Laju Perubahan Konsentrasi Zat Terhadap Konsentrasi COD

Untuk mengkaji pengaruh laju perubahan konsentrasi zat terhadap konsentrasi COD maka pada penelitian ini diambil beberapa laju perubahan yang berbeda-beda antara lain $1.5 \text{ kg/m}^3\text{s}$, $2 \text{ kg/m}^3\text{s}$, dan $2.5 \text{ kg/m}^3\text{s}$, dimana parameter fisik lainnya tetap. Berikut disajikan hasil simulasi dispersi konsentrasi COD berdasarkan pada laju perubahan konsentrasi zat yang diberikan.



Gambar 2. Grafik konsentrasi COD dengan laju perubahan konsentrasi zat $1 \text{ kg/m}^3\text{s}$

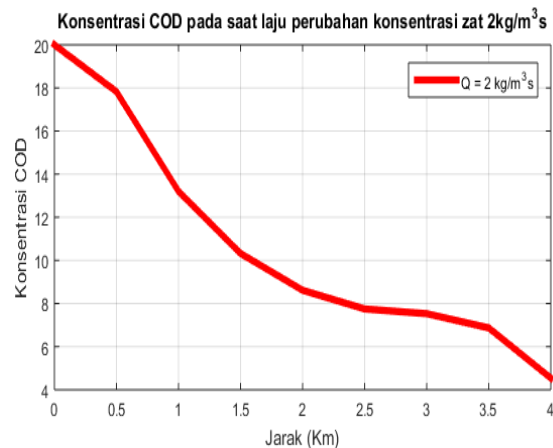
Berdasarkan Gambar 2 dengan laju perubahan konsentrasi zat $Q = 1 \text{ kg/m}^3\text{s}$ menunjukkan bahwa grafiknya mengalami penurunan dari jarak $0,0 \text{ km}$ dengan konsentrasi awal $k_0 = 20 \text{ kg/m}^3$ hingga jarak yang ke $4,0 \text{ km}$ konsentrasi COD-nya lebih rendah dari konsentrasi awal yaitu 4.4967 kg/m^3 .



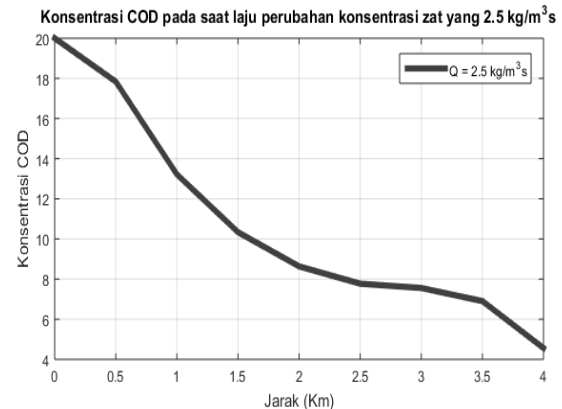
Gambar 3. Grafik konsentrasi COD dengan laju perubahan konsentrasi zat $1.5 \text{ kg/m}^3\text{s}$

Berdasarkan Gambar 3 dengan laju perubahan konsentrasi zat $Q = 1,5 \text{ kg/m}^3\text{s}$ menunjukkan bahwa grafiknya mengalami penurunan dari jarak $0,0 \text{ km}$ dengan konsentrasi awal $k_0 = 20 \text{ kg/m}^3$ hingga jarak yang ke $4,0 \text{ km}$ konsentrasi COD-nya lebih rendah dari konsentrasi awal yaitu 4.5188 kg/m^3 .

Selanjutnya berdasarkan Gambar 4 dengan laju perubahan konsentrasi zat $Q = 2 \text{ kg/m}^3\text{s}$ menunjukkan bahwa grafiknya mengalami penurunan dari jarak $0,0 \text{ km}$ dengan konsentrasi awal $k_0 = 20 \text{ kg/m}^3$ hingga jarak yang ke $4,0 \text{ km}$ konsentrasi COD-nya lebih rendah dari konsentrasi awal yaitu 4.5409 kg/m^3 .



Gambar 4. Grafik konsentrasi COD dengan laju perubahan konsentrasi zat $2 \text{ kg/m}^3\text{s}$



Gambar 5. Grafik konsentrasi COD dengan laju perubahan konsentrasi zat $2,5 \text{ kg/m}^3\text{s}$

Berdasarkan Gambar 5 dengan laju perubahan konsentrasi zat $Q = 2,5 \text{ kg/m}^3\text{s}$ menunjukkan bahwa grafiknya mengalami penurunan dari jarak $0,0 \text{ km}$ dengan konsentrasi awal $k_0 = 20 \text{ kg/m}^3$ hingga jarak yang ke $4,0 \text{ km}$ konsentrasi COD-nya lebih rendah dari konsentrasi awal yaitu 4.5630 kg/m^3 .

Dengan demikian, sesuai hasil simulasi dari program matlab dengan menggunakan metode beda hingga pada Gambar 2 sampai Gambar 5 maka dapat disimpulkan bahwa laju perubahan konsentrasi zat juga berpengaruh terhadap konsentrasi COD, dimana semakin besar laju perubahan konsentrasi zat maka semakin tinggi konsentrasi COD-nya.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa perilaku dispersi COD pada larutan limbah yang mengalir sepanjang saluran air adalah semakin besar kecepatan aliran maka semakin rendah konsentrasi COD-nya dan semakin besar laju perubahan konsentrasi zat maka semakin tinggi konsentrasi COD-nya. Sehingga jika COD-nya tinggi maka akan berpengaruh pada saluran air tersebut atau air tersebut dapat dikatakan tercemar. Penelitian ini dapat dikembangkan melalui studi kasus pada daerah atau lokasi pembuangan larutan limbah yang bersumber dari pabrik.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahsan, N (2013) *Development of A Finite Element Based Model For Water Quality In Natural Streams*, International Journal of Civil, Structural, Environmental and Infrastructure Engineering Research and Development (IJSEIERD), Vol. 3 No. 3, TJPRC Pvt. Ltd.
- Budiman, A. (2010) *Pemodelan Kualitas Air dengan Parameter BOD dan DO pada Sungai Ciliwung*, Jurnal Teknologi Lingkungan, Vol. 5 No.3 pp 97-106.
- Fadlilillah, M. I (2010) *Model Matematis Perubahan Kualitas Air Di Daerah Aliran Sungai (Das) Citarum Jawa Barat*, Skripsi : Departemen Teknik Pertanian, IPB.
- Fatahillah, A., Gangga, M. D. F. F(2015) *Analisis Model Matematika Proses Penyebaran Limbah Cair Pada Air Tanah*, al-Khwarizmi, Vol. 3 No.1 pp 1-8.
- Gholizadeh, M. H., Melesse, A. M., Reddi, L (2016) *A Comprehensive Review on Water Quality Parameters Estimation Using Remote Sensing Techniques*, Florida International University, USA.
- Jinjun, T., Yonggang, H., Jie, Z (2008) *Chemiluminescence detection of permanganate index (COD_{Mn}) by a luminol- $KMnO_4$ based reaction*, Journal of Environmental Sciences, Vol. 20 pp 252–256, Science Direct.
- Luknanto, D (2003) *Model Matematika Numerik*, Bahan kuliah. Laboratorium Hidraulika, JTS FT Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Pochai, N., Tangmanee, S., Crane L.J. and Miller, J.J.H (2006). *A Mathematical Model of Water Pollution Control Using the Finite Element Method*, Proc. Appl. Math. Mech, vol. 6, pp 755-756.
- Ribal (2008). *Metode Beda Hingga, Draft Lecture Note On Finite Difference Methods*. Jurusan Matematika FMIPA Unhas, Makasar.
- Zuhair. (2008). *Metode Numerik – Deret Taylor dan Deret MacLaurin*. Universitas Mercubuana, Jakarta.