JURNAL FOURIER | April 2019, Vol. 8, No. 1, 27-34 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2019.81.27-34 E-ISSN 2541-5239

Determinan Matriks $FLScirc_r$ Bentuk Khusus $n \times n, n \geq 3$ Menggunakan Metode Salihu

Ade Novia Rahma, Kartika Swandayani, Corry Corazon Marzuki

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293, Indonesia

Korespondensi; Kartika Swandayani, Email: ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id, kartikaswandayani00@gmail.com

Abstrak

Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Kondensasi Salihu merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam menentukan determinan matriks yang memiliki ordo $n \times n, n \geq 3$. Metode Kondensasi Salihu merupakan metode gabungan antara Kondensasi Dodgson dan Kondensasi Chio. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus dengan menggunakan metode Kondensasi Salihu. Dalam menentukan determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama diperhatikan pola detrminan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus berode 3×3 sampai 10×10. Kedua pembuktian bentuk umum determinan menggunakan metode induksi matematika. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus. Aplikasi juga dibahas didalam bentuk contoh.

Kata Kunci: Determinan; Induksi Matematika; Kondensasi Salihu; Matriks $FLScirc_r$

Abstract

Determinants have an important role in solving several problems in the matrics and are widely used in mathematics and applied sciences. Salihu condensation is one method that can be used to determine the determinant of a matrics that has an order $\mathrm{n} \times \mathrm{n}, (\mathrm{n} \geq 3$. The Salihu Condensation Method is a combined method between Dodgson Condensation and Chio Condensation. This study aims to determine the determinant of a specially $\mathrm{FLScirc_r}$ matrics form using the Salihu Condensation method. In determining the determinant of a specially $\mathrm{FLScirc_r}$ matrics there are several steps taken. First, attention the determinant pattern of a specially $\mathrm{FLScirc_r}$ matrics in orde of 3Ч3 to 10Ч10. Second, prove of the general form of determinant using the mathematical induction method. The result obtained is the determination of the general determinant from of a specially $\mathrm{FLScirc_r}$ matrics.

Keywords: Determinant; Mathematical Induction; $FLScirc_r$ matrics; Salihu Codentation

Pendahuluan

Menurut Howard Anton [1] Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran (ordo) suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Menurut Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu [2] Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $FLScirc_r$ jika memenuhi formula pada persamaan dibawah ini

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 + a_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 + a_2 & ra_4 + a_3 & \cdots & a_0 + a_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 + a_1 & ra_3 + a_2 & \cdots & ra_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dapat ditulis dengan $A = FLScirc_r(a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1})$.

Salah satu pembahasan dalam teori matriks adalah menentukan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Nilai determinan matriks dapat menentukan invers matriks. Jika nilai determinan matriks tidak nol, maka matriks tersebut punya invers. Namun jika nilai determinannya nol, maka matriks tidak mempunyai invers. Nilai determinan juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak digunakan oleh bidang ilmu optimasi, ekonomi dan lainnya.

Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya, Metode Sarrus, Metode Ekspansi Kofaktor, Metode Kondensasi Chio, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada makalah ini metode yang akan digunakan adalah Metode Kondensasi Salihu, dimana kondensasi salihu terbentuk dari menggabungkan dua metode yaitu Metode Kondensasi Chio dan Dodgson. Menentukan nilai determinan suatu matriks berukuran kecil tidaklah begitu sulit. Namun jika matriksnya berukuran besar, maka menentukan determinan suatu matriks lumayan sulit. Artinya dieprlukan formula yang tepat utuk memudahkan menentukan determinan suatu matriks. Tujuannya, untuk memudahkan mendapatkan nilai determinan matriks. Hanya dengan mensubsitusi entri-entri mariks maka nilai determinannya didapat tanpa melalui proses yang panjang. Makalah ini membahas determinan matriks $FLScirc_r$ yang berukuran $n \times n$ dengan bentuk khusus.

Pembahasan matriks $FLScirc_r$ telah dikaji oleh peneliti Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu [3] yang berjudul "*Effiecient Algorithm for Finding the Inverse and the Group Inverse of $FLScirc_r$ matrix*". Pada makalah kali ini penulis akan menentukan rumus umum untuk determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & \cdots & a & a \\ ra & a & a & a & \cdots & a & a \\ ra & ra+a & a & a & \cdots & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & a \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0, a, r \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Metode Penelitian

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks $FLScirc_r$, determinan, determinan matriks $FLScirc_r$, serta induksi matematika.

Terdapat banyak jenis-jenis matriks, salah satunya adalah matriks $FLScirc_r$. Berikut diberikan definisi matriks $FLScirc_r$.

Definisi 1 (Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu, 2005) Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $FLScirc_r$ jika memenuhi formula pada Persamaan (1).

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu metode sarrus, metode minor dan kofaktor, metode kondensasi chio, metode eliminasi gauss, metode dekomposisi matriks. Berdasarkan 5 metode diatas, penulis hanya menggunakan metode salihu dalam mencari determinan suatu matriks.

Metode Salihu

Metode Salihu ditemukan oleh Armend Salihu. Metode salihu dihasilkan berdasarkan pada metode Dodgson dan metode Chio. Sebelum pembahasan lebih lanjut, akan diperkenalkan beberapa istilah yang berkaitan dengan metode Salihu.

a. Determinan Interior

Determinan interior adalah determinan yang berorde $(n-2) \times (n-2)$ dari sebuah matriks berode $n \times n, n \geq 3$ yang diperoleh dengan cara mengapus baris pertama, menghapus kolom pertama, menghapus baris terakhir dan menghapus kolom terakhir.

Misalkan matriks A adalah matriks 4×4:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Maka determinan interiornya: $|B|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

b. Determinan Unik

Determinan unik adalah determinan yang berorde $(n-1)\times(n-1)$dari sebuah matriks berorde $n\times n\ (n\geq 3)$. Dalam metode Salihu, terdapat empat buah determinan unik, yaitu $|C|,|D|,|E|$dan $|F|$ yang diperoleh dengan cara menghapus baris terakhir dengan kolom terakhir, menghapus kolom pertama dengan baris terakhir, menghapus baris pertama dengan kolom terakhir dan menghapus baris pertama dengan kolom pertama.

Misalkan matriks A yang berukuran 4×4:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Maka determinan uniknya:

$$(|C|)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(|D|)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$(|E|)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$(|F|)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan penjelasan dari metode kondensasi Salihu diatas maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan metode kondensasi Salihu dalam teorema berikut:

Teorema 1 (Armend Salihu, 2012) Setiap determinan yang berorde $n\times n\ (n\geq 2)$ dapat direduksi menjadi determinan yang berorde 2×2, dengan menghitung 4 buah determinan yang berorde $(n-1)\times(n-1)$ dan sebuah determinan yang berorde $(n-2)\times(n-2)$, dengan syarat $(n-2)\times(n-2)\neq 0$.

Bentuk umum dari metode Salihu untuk menghitung determinan matriks berorde $n\times n, (n\geq 3)$ adalah sebagai berikut:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\frac{1}{|B|}.\begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix}, |B|\neq 0$$

dimana $|B|$ adalah determinan interior yang berorde $(n-2) \times (n-2)$ sementara $|C|, |D|, |E|$dan $|F|$ adalah determinan unik yang berorde $(n-1) \times (n-1)$.

Ada beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian-penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah Andi Bahota dkk[5]. Yang menjelaskan tentang kajian tentang Metode Kondensasi Salihu pada Determinan Matriks $n \times n, n \geq 3$.

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli Sukirman [6].

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut:

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ juga benar.

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama menentukan determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus 3×3 sampai 10×10, menduga bentuk umum determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus dengan memperhatikan pola rekursifnya. Kedua membuktikan bentuk umum determinan menggunakan metode induksi matematika.

Hasil dan Pembahasan

Diberikan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus orde 3×3 sampai 10×10 sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ ra & a & a \\ ra & ra+a & a \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi Salihu diatas adalah:

$$|A_3| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} -ra^2 & 0 \\ r^2a^2 & -ra^2 \end{vmatrix} = \frac{r^2a^4}{a} = r^2a^3$$

Lalu diberikan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus orde 4×4 sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a \\ ra & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi Salihu adalah:

$$|A_4| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{-ra^2}\begin{vmatrix} r^2a^3 & 0 \\ r^3a^4 & r^2a^3 \end{vmatrix} = \frac{r^4a^6}{-ra^2} = -r^3a^4$$

Lalu diberikan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus orde 5×5 sebagai berikut:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi salihu adalah:

$$|A_5| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2a^3}\begin{vmatrix} -r^3a^4 & 0 \\ r^4a^4 & -r^3a^4 \end{vmatrix} = \frac{r^6a^8}{r^2a^3} = r^4a^5$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya didapat determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi Salihu sebagai berikut.

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & 0 \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

$$|A_6| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{-r^3a^4}\begin{vmatrix} r^4a^5 & 0 \\ r^5a^5 & r^4a^5 \end{vmatrix} = \frac{r^8a^{10}}{-r^3a^4} = -r^5a^6$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

$$|A_7| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{r^4a^5}\begin{vmatrix} -r^5a^6 & 0 \\ r^6a^6 & -r^5a^6 \end{vmatrix} = \frac{r^{10}a^{12}}{r^4a^5} = r^6a^7$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

$$|A_8| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{-r^5a^6}\begin{vmatrix} r^6a^7 & 0 \\ r^7a^7 & r^6a^7 \end{vmatrix} = \frac{r^{12}a^{14}}{-r^5a^6} = -r^7a^8$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

$$|A_9| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{r^6a^7}\begin{vmatrix} -r^7a^8 & 0 \\ r^8a^8 & -r^7a^8 \end{vmatrix} = \frac{r^{14}a^{16}}{r^6a^7} = r^8a^9$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{bmatrix}$$

$$|A_{10}| = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} C & D \\ E & F \end{vmatrix} = \frac{1}{-r^7a^8}\begin{vmatrix} r^8a^9 & 0 \\ r^9a^9 & r^8a^9 \end{vmatrix} = \frac{r^{16}a^{18}}{-r^7a^8} = -r^9a^{10}$$

Setelah kita mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus yang berorde 3×3 sampai 10×10, maka akan dibuatkan bentuk umum dari determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus tersebut. Terlihat dalam Teorema 2 berikut.

Teorema 2. *Diberikan A_n suatu matriks $FLScirc_r$bentuk khusus berorde $n \times n$, $n \geq 3$ pada Persamaan (2) maka nilai determinan dari matriks A_n adalah:*

$$|A_n| = (-1)^{n-3}r^{n-1}a^n, \quad n \geq 3$$

Bukti: Pembuktian teorema tersebut menggunakan induksi matematika.
Untuk n ganjil pembuktiannya sebagai berikut:

1. Basis Induksi. Akan ditunjukkan $p(3)$ benar.
   Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} p(3) : |A_3| &= (-1)^{3-3}r^{3-1}a^3 \\ &= r^2a^3 \end{aligned}$$

   Dengan memperhatikan bentuk umum determinan 3×3 maka $p(3)$ benar.

2. Langkah induksi. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu $p(k): |A_k| = (-1)^{k-3}r^{k-1}a^k,\ k \geq 3$. Selanjutnya akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$p(k+1): |A_{k+1}| = (-1)^{k-2}r^k a^{k+1},\ k \geq 3 \tag{3}$$

Pembuktian dimulai dari:

$$|A_{k+1}| = \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & \cdots & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & \cdots & a & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & ra+a & ra+a & a \end{vmatrix}_{k+1}$$

$$= -ra \begin{vmatrix} 0 & a & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ ra & a & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ ra & ra+a & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & a & a & \cdots & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & a & \cdots & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & a & a \\ ra & ra+a & ra+a & ra+a & ra+a & \cdots & ra+a & ra+a & a \end{vmatrix}_{k}$$

$$= -ra\,|A_k|$$
$$= -ra\,(-1)^{k-3} r^{k-1} a^k$$
$$= (-1)^{k-2} r^k a^{k+1}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (3) maka $p(k+1)$ benar. Berdasarkan langkah 1 dan langkah 2 maka Teorema 2 terbukti.

Contoh 1. Tentukan determinan dari matriks dibawah ini

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal dapat ditulis $A_4 = FLScirc_3(0,1,1,1)$ dengan $n = 4, r = 3$ dan $a = 1$. Berdasarkan Teorema 2 maka determinannya adalah

$$|A_n| = (-1)^{n-3} r^{n-1} a^n$$
$$|A_4| = (-1)^{4-3} r^{4-1} a^4$$
$$= -27.$$

Contoh 2 Tentukan determinan dari matriks berikut

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal dapat ditulis $A_5 = FLScirc_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, dengan $n = 5, r = 2$ dan $a = \frac{1}{2}$. Berdasarkan Teorema 4.1 maka determinannya adalah

$$\begin{aligned} |A_n| &= (-1)^{n-3} r^{n-1} a^n \\ &= (-1)^{5-3} 2^{5-1} \frac{1}{2}^5 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kesimpulan

Bentuk umum dari determinan matriks bentuk khusus seperti Persamaan (2) adalah:

$$|A_n| = (-1)^{n-3} r^{n-1} a^n \,, \; n \geq 3$$

Referensi

[1] **Anton**, **Howard**., dan **Rorres**, **Chris**., *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi,* Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.

[2] **Sukirman**., *Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator, Yogyakarta, 2006.

[3] **Jiang**, **Zhaolin**., dan **Benxu**, **Zong**., *Efficient Algorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse Of FLScirc Matrix,* Journal of Application Math and Computing, Vol 18, No 1-2, 2005.

[4] **Rinaldi**, **Munir**., *Matematika Diskrit*, Edisi Kelima, Informatika, Bandung, 2012.

[5] **Sumitro**, **Adrianus** dkk., *Kajian Metode Kondensasi Chio Pada Determinan Matriks* $n \times n, n \geq 3$, Buletin Ilmiah Mat. Stat. Dan Terapannya, Vol 04 No. 03, Hal 279-284, 2015.

[6] **Olson**, **Brian**. **J**, dkk. *Circulant Matrices and Their Application to Vibration Analysis* . Vol 66. 2014.

[7] **Salihu**, **A.** *New Method to Calculate Determinants of Matrix, by Reducing Determinants to 2nd Order* .Vol 6(19) Hal 913-917. 2012.