Jurnal Bimbingan dan Konseling "PSIKOPEDAGOGIA"
2012, Vol. I, No. 2

2012, Program Studi Bimbingan dan Konseling FKIP UAD
ISSN : 2301-6160

Manfaat Penaksiran Parameter Dengan Metode EBLUP Pada Model *Fay-Herriot* Untuk Penelitian Konseling

Luthfatul Amaliana

Departemen Matematika, Universitas Indonesia
luthfa.amaliana90@gmail.com

Abstrak

Model Fay-Herriot merupakan salah satu kasus khusus dari model area level pada *small area estimation* (SAE). Penaksiran parameter pada model Fay-Herriot dapat dilakukan dengan beberapa metode, diantaranya metode *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP) dan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP). Makalah ini bertujuan untuk mencari taksiran parameter pada model Fay-Herriot dengan menggunakan metode EBLUP.Berbeda dengan metode BLUP, pada metode EBLUP variansi pengaruh acak *small area* diasumsikan tidak diketahui. Oleh karena itu, perlu dilakukan penaksiran terhadap variansi pengaruh acak *small area*. Metode yang akan digunakan untuk menaksir variansi pengaruh acak *small area* tersebut adalah metode *Maximum Likelihood* (ML).

Kata Kunci : model Fay-Herriot, *Empirical Best Linear Unbiased Prediction, Best Linear Unbiased Prediction*

1. PENDAHULUAN

Small area didefinisikan sebagai suatu subpopulasi kecil atau gambaran suatu area geografis kecil (Rao, 2003). *Small area* dapat berupa desa/kelurahan, kecamatan, kabupaten, kelompok suku, maupun kelompok umur. Suatu teknik statistika yang memanfaatkan informasi tambahan (*auxiliary variables*), seperti data sensus dan atau catatan administratif *small area* tersebut, maupun catatan administratif *small area* lain yang memiliki karakteristik hampir sama dinamakan *small area estimation*(Rao, 2003).

Penaksiran parameter pada *small area* dapat dilakukan dengan penaksiran langsung (*direct estimation*) dan penaksiran tidak langsung (*indirect estimation*). Pada penaksiran tidak langsung, terdapat dua jenis model penghubung yaitu model implisit dan eksplisit. Model eksplisit termasuk dalam *mixed model* yang mengandung pengaruh acak *small area*.Model eksplisit ini selanjutnya disebut dengan model *small area*.

Model *small area* terbagi menjadi model area level dan model unit level. Salah satu kasus khusus dari model area level adalah model Fay-Herriot. Penaksiran parameter pada model Fay-Herriot dapat dilakukan dengan metode Bayes dan non-Bayes. Metode BLUP dan EBLUP termasuk dalam metode non-Bayes. Pada metode BLUP, variansi pengaruh acak *small area* diasumsikan telah diketahui. Sedangkan pada metode EBLUP nilai variansi pengaruh acak *small area* tidak diketahui, sehingga harus ditaksir yang dalam hal ini akan digunakan metode *Maximum Likelihood* (ML).

2. MODEL

2.1 Model *Small Area*

Berdasarkan ketersediaan datanya, model *small area* dapat dikelompokkan menjadi dua yaitu model area level dan model unit level. Pada makalah ini hanya akan dijelaskan lebih lanjut mengenai model area level.

2.1.1 Model Area Level

Model area level merupakan salah satu jenis model *small area*, dimana data pendukung yang tersedia hanya sampai pada tingkat area, yaitu $\mathbf{z}_i^T = (z_{1i}, \dots, z_{pi})$. Parameter *small area* yang ingin diamati adalah θ_i. Parameter *small area* ini berhubungan linear dengan $\mathbf{z}_i^T$ mengikuti model linear berikut:

$$\theta_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\beta} + b_i v_i \quad i = 1, \dots, m \tag{2.1}$$

dengan

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ adalah vektor parameter yang *fixed*, berukuran $px1$

b_i konstanta positif yang diketahui

v_i pengaruh acak *small area*, diasumsikan $v_i \sim iid(0, \sigma_v^2)$

m jumlah *small area.*

Namun, dalam membuat kesimpulan tentang populasi di bawah model (2.1), diasumsikan bahwa penaksir langsung $\hat{\theta}_i$ telah ada pada model dan dapat dituliskan sebagai:

$$\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i \quad i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

dimana e_i adalah sampling *error* yang diasumsikan diketahui dengan $e_з \sim ind(0, \psi_i)$.

Model pada persamaan (2.1) dan (2.2), jika digabungkan akan menjadi:

$$\hat{\theta}_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\beta} + b_i v_i + e_u \quad i = 1, \dots, m \tag{2.3}$$

dengan asumsi bahwa $v_i \sim iid(0, \sigma_v^2)$ dan $e_i \sim ind(0, \psi_i)$. Model ini merupakan salah satu kasus khusus dari *general linear mixed model* (GLMM) dengan *block diagonal covariance structure*. Pada model area level ini, parameter yang akan ditaksir adalah parameter *small area*, yaitu

$$\theta_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\beta} + b_i v_i \quad i = 1, \dots, m.$$

2.2 Model Fay-Herriot

Model ini diperkenalkan oleh Fay dan Herriot (1979) sebagai model dasar untuk menaksir pendapatan per kapita pada *small area - small area* (dengan populasi yang kurang dari 1.000 jiwa penduduk) di Amerika Serikat. Model Fay-Herriot ini merupakan kasus model area level seperti pada persamaan (2.3) dengan $b_i = 1$.

Berikut ini akan didefinisikan bentuk model Fay-Harriot yang memiliki nilai taksiran langsung $\hat{\theta}_i$ dan vektor variabel pendukung $\mathbf{z}_i^T$. Model ini selanjutnya akan digunakan dalam penaksiran parameter dengan menggunakan metode EBLUP.

Bentuk model Fay-Herriot (Rao, 2003) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i &= \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i i = 1, 2, \dots, m \\ &= \theta_i + e_i\end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan

$\hat{\theta}_i$: nilai taksiran langsung, berukuran $1x1$

θ_i : parameter *small area,* berukuran $1x1$

$\mathbf{z}_i$:vektor variabel pendukung, berukuran $px1$

$\boldsymbol{\beta}$:vektor parameter yang *fixed*, berukuran$px1$

v_i : pengaruh acak *small area,* berukuran $1x1$, diasumsikan $v_i \sim \text{NID}(0, \sigma_v^2)$

e_i :sampling *error*, berukuran $1x1$, diasumsikan $e_i \sim \text{NID}\ (0, \psi_i)$, ψ_i diketahui,

Dimana $v_i$dane_i saling independen, sehingga $E(v_i {e_i}^T) = E(e_i {v_i}^T) = 0$ dan $E(v_i {v_i}^T) = \sigma_v^2$. Matriks varians-kovarians dari $v_i$dan e_i yaitu masing-masing **G** dan **R** merupakan matriks *block* diagonal.

Matriks **G** merupakan matriks varians-kovarians, definit positif, berukuran

nxn, dari variansi antar *small area*, yang biasanya tidak diketahui dan harus ditaksir. Matriks **R**adalah matriks varians-kovarians definit positif berukuran nxn dari *sampling error*. Sedangkan $\mathbf{V} = \mathbf{G} + \mathbf{R}$ adalah matriks varians-kovarians dari $\hat{\theta}_i$. Pada model Fay-Herriot ini, parameter yang akan ditaksir adalah $\theta_i = \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i$. Metode yang akan digunakan adalah metode EBLUP.

3. HASIL

Sebelum mencari penaksir EBLUP, terlebih dahulu akan dicari penaksir BLUP pada model Fay-Herriot. Penaksir BLUP ini diperoleh dari penaksir langsung dan penaksir sintetik yang sebelumnya akan dibahas lebih lanjut pada 3.1.

3.1 Penaksir Langsung, Sintetik, dan Komposit pada Model Fay-Herriot

3.1.1 Penaksir Langsung (*direct estimator*)

Pada model Fay-Herriot, parameter *small area*(θ_i)ditaksir secara langsung dengan $\hat{\theta}_i$. Nilai $\hat{\theta}_i$ ini berhubungan secara linear dengan θ_i mengikuti model linear berikut:

$$\hat{\theta}_i = \underbrace{\mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i}_{\theta_i} + e_i = \theta_i + e_i \quad i = 1, \dots, m \tag{3.1}$$

dimana e_i adalah sampling *error* pada area ke$-i$ yang diasumsikan diketahui dengan $e_i \sim \text{NID}\,(0, \psi_i)$.

Penaksiran langsung ini dilakukan hanya berdasarkan pada data dari sampel dalam *small area*. Akan tetapi, taksiran langsung yang dihasilkan memiliki *standar error* yang besar karena ukuran sampel dari *small area* yang diamati terlalu kecil. Oleh karena itu, diperlukan penaksiran tidak langsung (*indirect estimation*) yang dapat memperkecil *standar error* (Rao, 2003).

3.1.2 Penaksir Sintetik

Penaksir sintetikdihasilkan dari metode sintetik, yang merupakan salah satu metode penaksiran tidak langsung dalam *small area estimation.* Penaksiran tidak langsung tersebut dilakukan dengan memanfaatkan informasi dari *small area* lain yang memiliki karakteristik hampir sama.

Penaksir sintetik dengan informasi variabel-variabel pendukung (*auxiliary variables*) yang tersedia pada area ke$-i$, yaitu $\mathbf{z}_i^T$, dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\hat{\theta}_i^{\,S} = \mathbf{z}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} \; ; \; i = 1, 2, \dots, m \tag{3.2}$$

dimana

$\mathbf{z}_i$berukuran $px1$,

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan vektor parameter yang *fixed,* berukuran $px1$.

Definisi penaksir sintetiktelah dijelaskan oleh Gonzales (1973) dalam Rao (2003), bahwa suatu penaksir disebut penaksir sintetik jika suatu penaksir langsung yang *reliable* untuk area luas yang mencakup *small area - small area,* digunakan untuk menurunkan penaksir tidak langsung untuk *small area,* di bawah asumsi bahwa *small area* tersebut memiliki karakteristik yang sama seperti area yang luas. Namun, kelemahan dari penaksir sintetik ini adalah memiliki bias yang besar karena adanya asumsi kesamaan karakteristik antara *small area* dengan area yang luas.

3.1.3 Penaksir Komposit

Penaksiran pada *small area* dengan penaksir langsung dan penaksir sintetik, memiliki kelebihan dan kekurangan. Penaksir langsung bersifat *unbiased* karena hanya berdasarkan pada data sampel dari *smallarea* tersebut. Namun, penaksir ini kurang stabil, karena memiliki *standar error* yang besar. Sedangkan penaksir sintetiktelah memiliki *standar error* yang lebih baik daripada penaksir langsung, tetapi memiliki bias yang besar. Oleh karena itu, salah satu cara untuk menyeimbangkan ketidakstabilan dari penaksir langsung dan bias yang besar dari penaksir sintetik, dilakukan dengan membentuk penaksir komposit.

Penaksir kompositmerupakan rata-rata terboboti dari penaksir langsung dan penaksir sintetik. Bentuk penaksir komposit yaitu:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i^{\ C} &= \phi_i\hat{\theta}_i + (1-\phi_i)\hat{\theta}_i^{\ S}\ ;\ i = 1, 2, \dots, m \\ &= \phi_i\hat{\theta}_i + (1-\phi_i)\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad (3.3)\end{aligned}$$

dengan ϕ_i merupakan bobot yang dipilih, dimana $0 \leq \phi_i \leq 1$ dan m menunjukkan banyaknya *small area.*

Bobot optimal untuk penaksir komposit dapat diperoleh dengan meminimalkan $\mathrm{MSE}\left[\hat{\theta}_i^{\ C}\right]$ terhadap ϕ_i dengan asumsi bahwa $cov\left(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_i^{\ S}\right) = 0$. Bobot optimalnya dapat dinyatakan sebagai:

$$\phi_i^{\ *} = \frac{\mathrm{MSE}\left[\hat{\theta}_i^{\ S}\right]}{\mathrm{MSE}[\hat{\theta}_i] + \mathrm{MSE}\left[\hat{\theta}_i^{\ S}\right]} \qquad (3.4)$$

(Rao, 2003).

3.2 Penaksir BLUP pada Model Fay-Herriot

Berdasarkan penaksir kompositpada persamaan (3.3), dapat dibentuk penaksir pada model Fay-Herriot yang bersifat linear, *unbiased*, dan memiliki *standar error* kecil (MSE terbaik), yang berbentuk (Rao, 2003) :

$$\begin{aligned}\left(T(\hat{\theta}_i)\right)(\sigma_v^2) &= \phi_i\hat{\theta}_i + (1-\phi_i)\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \phi_i\hat{\theta}_i - \phi_i\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \phi_i\left(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Dengan

$$\phi_i = \frac{\sigma_v^2}{(\sigma_v^2 + \psi_i)} \qquad (3.6)$$

Penaksir BLUPdi atas, yaitu $T(\hat{\theta}_i)$, masih mengandung σ_v^2, karena pada metode BLUP diasumsikan bahwa σ_v^2 diketahui nilainya. Dengan menunjukkan bahwa $T(\hat{\theta}_i)$yang telah diperoleh bersifat linear, *unbiased*, dan *best* (memiliki MSE terkecil), maka dapat juga diperoleh :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\sigma_v^2) = \left(\mathbf{z}_i(\sigma_v^2 + \psi_i)^{-1}\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{z}_i(\sigma_v^2 + \psi_i)^{-1}\hat{\theta}_i \qquad (3.7)$$

(Rao, 2003).

3.3 Penaksir EBLUP pada Model Fay-Herriot

Berbeda dengan metode BLUP, pada penaksiran parameter dengan metode EBLUP, variansi pengaruh acak (σ_v^2)tidak diketahui nilainya, sehingga harus ditaksir dari data. Salah satu metode yang dapat dan akan digunakan adalah metode *Maximum Likelihood* (ML).

Dengan metode ML, diperlukan fungsi *likelihood* yang merupakan pdf dari $\hat{\theta}_i$ dengan $E(\hat{\theta}_i) = \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}danvar(\hat{\theta}_i) = \sigma_v^2 + \psi_i$. Karena $v_i$dan e_i berdistribusi normal, maka $\hat{\theta}_i$ juga berdistribusi normal dan dapat ditulis sebagai

$$\hat{\theta}_i \sim N\left(\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}, (\sigma_v^2 + \psi_i)\right).$$

Sedangkan pdf dari $\hat{\theta}_i$ dapat diperoleh:

$$f(\widehat{\theta}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(\sigma_v^2+\psi_i)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)^T(\sigma_v^2 + \psi_i)^{-1}\left(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)\right] \quad (3.8)$$

Untuk mempermudah perhitungan, akan digunakan fungsi *log-likelihood*, yaitu:

$$\ln f(\hat{\theta}_i) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\left[\ln(\sigma_v^2 + \psi_i) + (\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta})^T(\sigma_v^2 + \psi_i)^{-1}(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta})\right] \quad (3.9)$$

Selanjutnya, fungsi *log-likelihood* tersebut diturunkan terhadap σ_v^2, dinotasikan dengan $\mathbf{s}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \sigma_v^2)$, sehingga untuk differensial terhadap elemen ke$-j$ diperoleh formula:

$$s_j\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \sigma_v^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\sigma_v^2 + \psi_i)} + \frac{1}{2}\frac{(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta})^T(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta})}{(\sigma_v^2 + \psi_i)^2} \quad (3.10)$$

Berdasarkan prosedur metode *Maximum Likelihood*, akan dicari solusi dari persamaan:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(\sigma_v^2 + \psi_i)} = \frac{1}{2}\frac{(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta})^T(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta})}{(\sigma_v^2 + \psi_i)^2} \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.11) tersebut, terlihat bahwa σ_v^2tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, taksiran σ_v^2kemudian diselesaikan secara numerik, yaitu dengan menggunakan *Scoring Algorithm*, dimana iterasi ke-(a+1)yaitu :

$$\sigma_v^{2(a+1)} = \sigma_v^{2(a)} + \left[\mathcal{L}\left(\sigma_v^{2(a)}\right)\right]^{-1}\mathbf{s}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\sigma_v^2)^{(a)}, \sigma_v^{2(a)}) \quad (3.12)$$

(Rao, 2003) dimana

$$\mathcal{L}(\sigma_v^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{(\sigma_v^2 + \psi_i)^2}$$

$$\mathbf{s}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \sigma_v^2) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_v^2 + \psi_i} + \frac{1}{2}\frac{(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}})^2}{(\sigma_v^2 + \psi_i)^2}$$

Proses iterasi tersebut berhenti jika $(\hat{\sigma}_v^2)^{(a+1)} \approx (\hat{\sigma}_v^2)^{(a)}$, dalam makalah ini ditetapkan $\left|(\hat{\sigma}_v^2)^{(a+1)} - (\hat{\sigma}_v^2)^{(a)}\right| < 10^{-5}$. Kemudian nilai $(\hat{\sigma}_v^2)^{(a+1)}$inidapat diambil sebagai taksiran dari σ_v^2. Nilai$\hat{\sigma}_v^2$ini yang akan disubstitusikan ke dalam penaksir BLUP yang sebelumnya telah diperoleh pada persamaan (3.5).

Dengan demikian, penaksir EBLUP yang diperoleh untuk kombinasi linear $\mathbf{z}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i$, adalah:

$$\begin{aligned}\left(T(\hat{\theta}_i)\right)\left(\hat{\sigma}_v^2\right) &= \mathbf{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{(\hat{\sigma}_v^2+\psi_i)}(\hat{\theta}_i - \mathbf{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \mathbf{z}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{v}_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

dengan

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\widehat{\sigma}_v^2) = \left(\mathbf{z_i}\left(\widehat{\sigma}_v^2 + \psi_i\right)^{-1}\mathbf{z_i^T}\right)^{-1}\mathbf{z_i}\left(\widehat{\sigma}_v^2 + \psi_i\right)^{-1}\widehat{\theta}_i$$

$$\widehat{v_i}\left(\widehat{\sigma}_v^2\right) = \frac{\widehat{\sigma}_v^2}{\left(\widehat{\sigma}_v^2 + \ \langle_i\right)}\left(\widehat{\theta}_i - \mathbf{z_i^T}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\left(\widehat{\sigma}_v^2\right)\right).$$

4. PENERAPAN

Data yang digunakan dalam contoh penerapan makalah ini adalah data Susenas 2008 dan data Potensi Desa (PODES) 2008 yang diperoleh dari data Badan Pusat Statistik (BPS). Dalam contoh penerapan ini, akan digunakan data kontinu yaitu pengeluaran rumah tangga per kapita per bulan di desa di Kabupaten Jember. Pengeluaran rumah tangga per kapita merupakan salah satu alat untuk mengukur kesejahteraan masyarakat. Survei yang dilakukan oleh BPS, seperti Susenas 2008, dirancang untuk inferensial bagi daerah yang luas. Sedangkan untuk memperoleh informasi pada area yang lebih kecil (*small area*), seperti pada level desa/kelurahan, digunakan salah satu metode yang tepat yaitu *small area estimation* (SAE).

Berdasarkan Laporan BPS 2007, Jawa Timur merupakan propinsi paling miskin di Pulau Jawa dan Kabupaten Jember merupakan satu di antara kota/kabupaten yang memiliki tingkat kemiskinan paling tinggi. Oleh karena itu, Kabupaten Jember dipilih sebagai daerah yang akan dibahas dalam contoh penerapan makalah ini.

Kabupaten Jember terdiri dari 247 desa, dimana 14,17% nya yaitu 35 desa terpilih sebagai sampel pada Susenas 2008. Setiap desa yang terpilih, diambil 14 sampai dengan 16 rumah tangga sebagai sampel, sehingga jumlah keseluruhan rumah tangga yang menjadi sampel adalah 549 rumah tangga. Jumlah rumah tangga yang menjadi sampel pada setiap desa tersebut sangat kecil jika dibandingkan dengan jumlah rumah tangga di masing-masing desa, yaitu berkisar antara 0,1% sampai dengan 1,67% (Matualage, 2012).

Dalam contoh penerapan ini, akan dicari taksiran pengeluaran rumah tangga per kapita per bulan di desa di Kabupaten Jember dengan metode EBLUP. Data variabel-variabel pendukung (*auxiliary variables*) diperoleh dari data PODES 2008. Berdasarkan ketersediaan data PODES, dipilih variabel-variabel pendukung yang berkaitan dengan faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran rumah tangga (Sunandi, 2011). Variabel-variabel pendukung tersebut antara lain:

a. persentase keluarga yang menggantungkan hidupnya pada pertanian $(\mathbf{z}_1^T)$,
b. jumlah keluarga yang menerima askeskin dalam satu tahun terakhir$(\mathbf{z}_2^T)$,
c. jumlah keluarga pengguna listrik PLN $(\mathbf{z}_3^T)$,
d. jumlah keluarga yang mengenyam pendidikan SD, SMP, SMA, dan PT $(\mathbf{z}_4^T)$,
e. jumlah keluarga yang tinggal di pemukiman kumuh $(\mathbf{z}_5^T)$,
f. jumlah keluarga yang memiliki Surat Keterangan Tidak Mampu (SKTM) dan satu tahun terakhir $(\mathbf{z}_6^T)$,
g. jumlah keluarga yang pernah belajar di lembaga pendidikan dan ketrampilan $(\mathbf{z}_7^T)$,
h. jumlah keluarga yang memiliki anggota keluarga sebagai Tenaga Kerja Indonesia (TKI) $(\mathbf{z}_8^T)$.

Data variabel-variabel pendukung tersebut memiliki satuan yang berbeda-beda, sehingga perlu distandarisasi terlebih dahulu. Penaksiran pengeluaran rumah tangga per kapita di desa di Kabupaten Jember dilakukan menggunakan *software R*, yaitu dengan program EBLUP ML.r.

Berdasarkan *output* yang dihasilkan oleh program EBLUP ML.r, diperoleh nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\hat{v}_i$yang masing-masing diberikan pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 berikut ini.

Tabel 4.1 Nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dengan Metode EBLUP

Taksiran	EBLUP ML
$\hat{\beta}_1$	-63.875
$\hat{\beta}_2$	-47.021
$\hat{\beta}_3$	59.037
$\hat{\beta}_4$	-6.977
$\hat{\beta}_5$	3.049
$\hat{\beta}_6$	-51.072
$\hat{\beta}_7$	-17.284
$\hat{\beta}_8$	-59.079

Tabel 4.2 Nilai $\hat{v}_i$ dengan Metode EBLUP

No. Desa	Taksiran EBLUP	No. Desa	Taksiran EBLUP
1	668.350	19	633.065
2	655.744	20	588.384
3	577.793	21	609.637
4	580.859	22	577.281
5	596.793	23	608.394
6	686.255	24	566.552
7	678.950	25	605.534
8	656.078	26	660.426
9	627.437	27	730.834
10	620.439	28	586.503
11	624.152	29	596.075
12	608.647	30	586.284
13	668.187	31	568.858
14	623.691	32	707.471
15	657.172	33	513.974
16	615.006	34	516.977
17	631.232	35	481.776
18	775.181		

Selanjutnya, dapat diperiksa asumsi bahwa taksiran pengaruh acak *small area* yang telah diperoleh berdistribusi normal dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Nilai taksiran variansi pengaruh acak $(\hat{\sigma}_v^2)$ secara numerik dicari dengan menggunakan *scoring algorithm.* Dengan mengambil nilai awal$\hat{\sigma}_v^{2(0)}$=5.000.000, diperoleh nilai taksiran variansi pengaruh acak yaitu $\hat{\sigma}_v^2 = 280.108.000.000$.

Dengan menjalankan program EBLUP ML.r, diperoleh nilai taksiran pengeluaran rumah tangga per kapita dengan metode EBLUP seperti yang diberikan pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Nilai Taksiran EBLUP dengan Program EBLUP ML.r

No. Desa	$(\hat{v}_i)$	No. Desa	$(\widehat{n}_i)$
1	166.389	19	674.222
2	-109.469	20	581.511
3	367.437	21	472.122
4	763.553	22	420.615
5	346.565	23	464.819
6	426.916	24	547.013
7	504.496	25	33.597
8	96.544	26	344.855
9	790.676	27	256.939
10	854.161	28	-66.699
11	746.070	29	489.578
12	343.443	30	-154.404
13	843.733	31	314.672
14	288.033	32	492.838
15	579.096	33	622.253
16	560.107	34	283.873
17	1.091.283	35	361.510
18	809.113		

Berdasarkan Tabel 4.3 di atas, desa-desa yang memiliki pengeluaran rumah tangga per kapita cukup tinggi adalah desa ke-18, desa ke-27, dan desa ke-32, dimana desa yang memiliki pengeluaran rumah tangga per kapita tertinggi adalah desa ke-18, yaitu sebesar Rp 775.181,-.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan makalah ini, dapat disimpulkan bahwa penaksiran parameter pada model Fay-Herriot dengan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dapat dilakukan dengan melakukan penaksiran parameter menggunakan metode *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP) dan mencari taksiran variansi pengaruh acak *small area* yang tidak diketahui, yang salah satunya dapat dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood* (ML).

REFERENSI

Barnes, R. J. (2006). *Matrix Differentiation. Springs Journal.*

Caroline, L. C. (2010). *Penaksiran Pengeluaran Per Kapita di Kabupaten Lumajang dengan Menggunakan Metode Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) pada Small Area Estimation (SAE).* Depok: Dept. Matematika, FMIPA, UI.

Handhika, T. (2008). *Penggunaan Metode Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) Pada General Linear Mixed Model (GLMM).* Depok: Dept. Matematika, FMIPA, UI.

Kackar, R. N., & Harville, D. A. (1984). *Approximation for Standars Errors of Estimators of Fixed and Random Effects in Mixed Linear Models. American Statistical Association, 79.*

Matualage, D. (2012). *Metode Prediksi Tak Bias Linear Terbaik Empiris Spasial Pada Area Kecil Untuk Pendugaan Pengeluaran Per Kapita.* Bogor: Sekolah Pasca Sarjana, IPB.

Phydelya, A. (2007). *Penggunaan Metode Best Linear Unbiased Prediction (BLUP) Pada Generalized Linear Mixed Model.* Depok: Dept. Matematika, FMIPA, UI.

Rao, J. N. (2003). *Small Area Estimaion.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Robinson, G. K. (1991). *That BLUP Is a Good Thing: The Estimation of Random Effect. Statistical Science, 6*(1), 15-51.

Sunandi, E. (2011). *Model Spasial Bayes dalam Pendugaan Area Kecil dengan Peubah Respon Biner (Kasus : Pendugaan Proporsi Keluarga Miskin di Kabupaten Jember, Jawa Timur).* Bogor: Pascasarjana, IPB.