POSITIFITAS DAN KETERCAPAIAN SISTEM LINIER FRACTIONAL WAKTU KONTINU

Imam Fahcruddin

Mahasiswa Progam Studi S2 Matematika
FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
e-mail: fahrudinuin@gmail.com

ABSTRACT

This paper studies a solution of the fractional continuous-time linier system. Necessary and sufficient condition were established for the internal and external positivity of fractional systems. Sufficient conditions are given for the reachability of fractional positive systems.

Keywords: fractional systems, positive systems, reachability

PENDAHULUAN

Sudah menjadi familiar, ketika fenomena dalam kehidupan sehari-hari sering dimodelkan dalam persamaan differensial. Beberapa model matematika yang telah dipublikasikan, berupa sistem persamaan differensial dengan orde *n*, $n \in \mathbb{N}$. Oleh sebab itu, sebagian besar pemerhati matematika sudah familiar dengan notasi-notasi $D^1 f(x)$ atau $\frac{df(x)}{dx}$, $D^2 f(x)$ atau $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, bahkan $D^n f(x)$ atau $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Lantas, bagaimana saat orde dari persamaan differensial tersebut bukan bilangan bulat, tetapi real bahkan kompleks, seperti $\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}$ atau $D^{\frac{1}{2}} f(x)$? Lebih lanjut, bagaimana aplikasi dari persamaan differensial tersebut, apakah hanya sekedar fantasi matematika saja.

Fractional Calculus merupakan salah satu topik dalam matematika yang mengkaji integral atau differensial dengan sebarang orde (Podlubny, 1999 : 42). Pembahasan mengenai *fractional calculus* mulai dibahas secara rinci oleh Leibnitz pada abad ke-18, kemudian dikembangkan lagi oleh L'Hospital, Euler, Lagrange, Laplace, Riemann, Fourier, Liouville, dan Caputo. Seiring dengan perkembangan sains dan teknologi, kompleksitas dari kejadian alam yang dialami tak bisa dipungkiri lagi. Hal ini menyebabkan adanya sub-sub sistem dalam sebuah model perlu dikaji lebih dalam. Dalam berbagai aplikasi pemodelan, sering dihadapkan pada permasalahan positifitas. Yang berarti variabel input, output, bahkan variabel state diinginkan bernilai tidak negatif. Seperti dalam model ekonomi, misalnya kuantitas dari investasi dan pajak selalu bernilai positif. Selain itu pemodelan dari masalah transpor polutan dan populasi juga memerlukan variabel-variabel yang bernilai positif. Sehingga penelitian mengenai positifitas pada sistem matematika berkembang pesat dewasa ini.

Pada paper ini, dibicarakan dua aspek penting terkait sistem linier fractional waktu kontinu, yaitu dari sisi kuantitatif maupun kualitatif. Mengenai aspek kuantitatif akan dibicarakan solusi dari sistem, sedangkan aspek kualitatif akan dikaji positifitas dan ketercapaian pada sistem tersebut. Dalam pembahasannya, disertai beberapa contoh aplikatif tentang sirkuit elektronika, yang didasarkan pada hasil penelitian Dzieliński.

Beberapa notasi yang digunakan dalam paper ini, diantaranya himpunan matriks *nxm* atas bilangan riil dinotasikan $\mathbb{R}^{nxm}$, dan $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{nx1}$. Himpunan matriks *mxn* atas bilangan riil yang entri-entrinya nonnegatif dinotasikan $\mathbb{R}_+^{mxn}$, dan $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+^{nx1}$. Suatu matriks A dengan entri nonnegatif dinotasikan dengan $A \geq 0$, dan matriks identitas *nxn* dinotasikan dengan I_n.

KAJIAN TEORI

Pada subbab ini, terlebih dahulu akan dipaparkan beberapa alat-alat yang digunakan untuk menyelesaikan solusi dari sistem linier fractional waktu kontinu.

Definisi 1 (Chen, 1984 : 56)
Diberikan fungsi f terdefinisi untuk $0 \leq t < \infty$. Transformasi Laplace dari *f*, dinotasikan dengan F atau $\mathcal{L}[f(t)]$, didefinisikan oleh

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \qquad (1)$$

asalkan integral (1) ada untuk setiap s yang lebih besar atau sama dengan suatu nilai s_0.

Dari definisi diatas, dapat dihasilkan beberapa sifat transformasi Laplace, seperti sifat konvolusi, yaitu:
Jika $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$, $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$ maka $\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$.

Kemudian, berikut ini dipaparkan beberapa fungsi yang berperan penting dalam pembahasan sistem linier fractional, yaitu fungsi Gamma yang menggeneralisasi *n!* ke bilangan tidak bulat, bahkan rasional dan fungsi Mittag-Leffler yang merupakan generalisasi dari fungsi eksponensial $e^{s_i t}$, yang berguna untuk mendapatkan solusi dari sistem tersebut.

Definisi 2 (Podlubny, 1999 : 1)

Fungsi Gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt, \quad n > 0.$$

Definisi 3 (Podlubny, 1999 : 16)

Suatu fungsi kompleks z yang didefinisikan

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

disebut sebagai fungsi Mittag-Leffler dengan satu parameter.

Dalam paper ini, definisi fractional derivative yang digunakan adalah definisi yang dikembangkan oleh Caputo, yaitu:

Definisi 4 (Kaczorek, 2011 : 30)

Diberikan $Re(\alpha) \in (n-1, n)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, dan $f(t)$ merupakan fungsi differensiabel sampai ke-n. Derivative fractional Caputo dengan orde $\alpha \in \mathbb{R}$, dinotasikan dengan D^α, didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \end{aligned}$$

untuk $n - 1 < \alpha \leq n$, dengan

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, Re(x) > 0$$

adalah fungsi gamma dan $f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n}$ merupakan persamaan differensial dengan orde n.

Dari definisi 1, dapat diperoleh hasil transformasi Laplace dari derivative fractional Caputo dengan orde $\alpha \in \mathbb{R}$, yang disajikan dalam teorema dibawah ini:

Teorema 5 (Kaczorek, 2011 : 31)

Transformasi laplace dari derivative fractional Caputo diberikan oleh

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0^+).$$

Bukti

Dengan menggunakan sifat konvolusi pada transformasi Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}[t^{n-\alpha-1}]\, \mathcal{L}[f^n(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} \Bigg[s^n F(s) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+) \Bigg] \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0^+). \end{aligned}$$

Karena terkait dengan sistem, maka ada beberapa jenis matriks yang mempunyai karakter khusus dan menjadi syarat positifitas dan ketercapaian pada sistem linier fractional waktu kontinu, diantaranya adalah matriks Metzler dan matriks monomial.

Definisi 6 (Kaczorek, 2008 : 225)

Suatu matriks persegi atas bilangan rill $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks Metsler jika entri-entri yang bukan pada diagonal utamanya nonnegatif, i.e. $a_{ij} \geq 0$ untuk $i \neq j$.

Definisi 7 (Kaczorek, 2008 : 226)

Suatu matriks persegi atas bilangan riil dikatakan monomial jika dan hanya jika setiap baris dan kolom dari entri matriks tersebut hanya memuat satu entri positif dan entri yang lain bernilai 0.

PEMBAHASAN

Solusi Sistem Linier Fractional Waktu Kontinu

Pandang sistem linier fractional waktu kontinu yang diberikan dengan sistem linier berikut ini:

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \qquad (8a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \qquad (8b)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ merupakan variabel state, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ variabel input, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ variabel output dan $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{Nxm}, C \in \mathbb{R}^{pxN}, D \in \mathbb{R}^{pxm}$.

Teorema 9 (Kaczorek, 2008 : 224)

Solusi dari sistem (8a) diberikan oleh

$$x(t) = \Phi_0(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau, \quad x(0) = x_0, \qquad (10)$$

dengan

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \qquad (11)$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha - 1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}, \qquad (12)$$

dimana $E_\alpha(At^\alpha)$ adalah fungsi matriks Mittage-Leffler, $\Gamma(x)$ adalah fungsi gamma.

Bukti

Dengan menerapkan transformasi Laplace pada (8a), diperoleh

$$\mathcal{L}[D^\alpha x(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)] = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)] \quad (13)$$

Berdasarkan definisi 1 dan teorema 5, hasil transformasi Laplace pada (8a) adalah

$$\mathcal{L}[D^\alpha x(t)] = s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x_0, \quad (14)$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \quad (15)$$

Hasil subsitusi (14) ke (13), diperoleh

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x_0 = AX(s) + BU(s), \quad (16)$$

$$X(s) = [I_N s^\alpha - A]^{-1}\left(s^{\alpha-1}x_0 + BU(s)\right), \quad (17)$$

Karena

$$[I_N s^\alpha - A]\left(\sum_{k=0}^\infty A^k s^{-(k+1)\alpha}\right) = I_N,$$

sehingga

$$[I_N s^\alpha - A]^{-1} = \left(\sum_{k=0}^\infty A^k s^{-(k+1)\alpha}\right).$$

Kemudian disubsitusikan ke (17), diperoleh

$$X(s) = \left(\sum_{k=0}^\infty A^k s^{-(k+1)\alpha}\right)\left(s^{\alpha-1}x_0 + BU(s)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty A^k s^{-(k\alpha+1)}x_0 + \sum_{k=0}^\infty A^k s^{-(k+1)\alpha}BU(s)$$

Kemudian hasil konvolusi dan invers transformasi Laplace pada persamaan diatas adalah

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

$$= \sum_{k=0}^\infty A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)\alpha}\right] x_0$$

$$+ \sum_{k=0}^\infty A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)\alpha}BU(s)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} x_0$$

$$+ \sum_{k=0}^\infty A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)\alpha}\right]\mathcal{L}^{-1}[BU(s)]$$

$$= \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

dengan

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_N s^\alpha - A] = \sum_{k=0}^\infty A^k \mathcal{L}^{-1}\left[s^{-(k+1)\alpha}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}.$$

Catatan 1. Sama halnya dengan derivative orde 1, Dari (11) dan (12), untuk $\alpha = 1$, diperoleh

$$\Phi_0(t) = \Phi(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(At)^k}{\Gamma(k+1)} = e^{At}.$$

Perhatikan sirkuit elektronik yang terdiri dari resistor, superkondensator, kumparan, dan sumber tegangan (arus). Dipilih variabel state yang diinginkan adalah jarak lintas (*across*) sumber tegangan dengan superkondensator dan arus dalam kumparan. Diketahui bahwa hubungan antara arus $i_C(t)$ dalam superkondensator dengan sumber tegangan $u_c(t)$ (Dzieliński, 2009) adalah

$$i_C(t) = C\frac{d^\alpha u_c(t)}{dt^\alpha} \text{ untuk} < 0\alpha < 1, \quad (18)$$

dengan C merupakan kapasitas dari super-kondensator.

Sama halnya, hubungan tegangan $u_L(t)$ pada kumparan dengan arus $i_L(t)$ adalah

$$u_L(t) = L\frac{d^\beta i_L(t)}{dt^\beta} \text{ untuk } 0 < \beta < 1, \quad (19)$$

dengan L merupakan *inductance* dari kumparan.

Dengan menggunakan hubungan (18) dan (19) dan hukum Kirchhoff`s maka sirkuit linier fractional memenuhi persamaan state:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha x_C}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\beta x_L}{dt^\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_C \\ x_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} e,$$

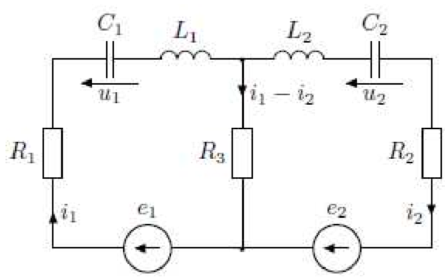
dengan komponen $x_C \in R^{n_1}$ merupakan jarak lintas tegangan dengan superkondensator, kemudian $x_L \in R^{n_2}$ merupakan arus dalam kumparan, dan $e \in R^m$ adalah tegangan dari sirkuit.

Contoh. Perhatikan sirkuit linier elektronika pada figur A1 yang terdiri dari resistor R_1, R_2, R_3, kapasitor C_1, C_2, induktor L_1, L_2 dan sumber tegangan e_1, e_2. Menurut (18) dan (19), dan hukum Kirchhoff, sirkuit linier fractional dari figur A1 memenuhi persamaan state:

$$i_1 = C_1\frac{d^{\alpha_1}u_1}{dt^{\alpha_1}}, \quad i_2 = C_2\frac{d^{\alpha_2}u_2}{dt^{\alpha_2}}$$

$$e_1 = (R_1 + R_2)i_1 + L_1\frac{d^{\beta_1}i_1}{dt^{\beta_1}} + u_1 - R_3 i_2,$$

$$e_2 = (R_2 + R_3)i_2 + L_2\frac{d^{\beta_2}i_2}{dt^{\beta_2}} + u_2 - R_3 i_1.$$



Gambar 1. Contoh Sirkui Elektronik

Persamaan state di atas dapat dibentuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1}u_1}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2}u_2}{dt^{\alpha_2}} \\ \frac{d^{\beta_1}i_1}{dt^{\beta_1}} \\ \frac{d^{\beta_2}i_2}{dt^{\beta_2}} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \text{dengan } A =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{R_1+R_3}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}.$$

Menurut teorema 9, solusi dari sistem linier fractional pada sirkuit elektronik diatas dapat diselesaikan dengan mudah.

Positifitas Sistem Linier Fractional Waktu Kontinu

Diawal tadi telah disinggung tentang konsep dasar dari sistem positif. Pembahasan mengenai positifitas dari sistem linier fractional waktu kontinu dibagi menjadi dua aspek, yaitu positif internal dan positif eksternal.

Definisi 19 (Kaczorek, 2008 : 225)

Sistem linier fractional (8) dikatakan positif internal *(internally positive)* jika dan hanya jika $x(t) \in \mathbb{R}_+^N$ dan $y(t) \in \mathbb{R}_+^P$ untuk $t \geq 0$ untuk sebarang initial state $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ dan semua input $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$.

Dari definsi 19, mengindikasikan bahwa variabel state dan output dari sistem (8) diharapkan selalu bernilai nonnegatif untuk $t \geq 0$. Syarat ini diperlukan agar terjadi kesesuaian antara model yang diteliti dengan fakta riil yang terjadi. Oleh karena itu, perlu adanya dilakukan karakterisasi sehingga dapat dihasilkan suatu kondisi yang dibutuhkan agar $x(t) \in \mathbb{R}_+^N$ untuk sebarang initial state $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ dan semua input $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$.

Lemma 20

Diberikan $A \in R^{NxN}$, $t \geq 0$ dan $0 < \alpha \leq 1$. Maka

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \in \mathbb{R}_+^{NxN} \text{ dan}$$

$$\Phi(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathbb{R}_+^{NxN}$$

jika dan hanya jika A merupakan matriks Metsler.

Bukti

(←). Dari ekspansi

$$\Phi_0(t) = I_N + \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} + \cdots ,$$

$$\Phi(t) = I_N \frac{t^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} + A\frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \cdots$$

Jika A matriks Metzler , jelas bahwa $\Phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{NxN}$ dan $\Phi(t) \in \mathbb{R}_+^{NxN}$ untuk bilangan kecil $t > 0$.

(→). Telah diketahui bahwa

$$e^{At} \in \mathbb{R}_+^{NxN} \text{ untuk } t \geq 0 \qquad (21)$$

jika dan hanya jika A merupakan matriks Metzler (Kaczorek, 2002). Sehingga

$$\Phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} - \frac{(At^\alpha)^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k! - \Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}\right)\left(\frac{(At^\alpha)^k}{k!}\right) \geq 0$$

$$\text{untuk } t \geq 0. \qquad (22)$$

karena $k! \geq \Gamma(k\alpha+1)$ untuk $0 < \alpha \leq 1$. Kemudian dari (22) dan (21) diperoleh $\Phi_0(t) \geq e^{At^\alpha} \geq 0$ untuk $t \geq 0$. Begitupun sebaliknya untuk kasus $\Phi(t)$.

Berikut ini akan disajikan syarat cukup dan perlu suatu sistem linier fractional waktu kontinu dapat dikatakan positif internal:

Teorema 23

Sistem fractional derivative waktu kontinu (2) merupakan positif internal jika dan hanya jika matriks A adalah matriks Metzler dan $B \in \mathbb{R}_+^{NxM}, C \in \mathbb{R}_+^{pxN}, D \in \mathbb{R}_+^{pxm}$.

Bukti

(←). Dari teorema 1, diketahui bahwa solusi dari (8a) dinyatakan dalam bentuk (10). Karena matriks A pada sistem (8a) adalah matriks Metzler, dari lemma 20 disimpulkan $x(t) \in \mathbb{R}_+^N$. Lebih lanjut, apabila $B \in \mathbb{R}_+^{NxM}$, $C \in \mathbb{R}_+^{pxN}$, $D \in \mathbb{R}_+^{pxm}$ dari (28), disimpulkan $y(t) \in \mathbb{R}_+^P$ untuk semua $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$.

(→). Dipilih $u(t) = 0, t \geq 0$ dan $x_0 = e_i$ (kolom ke-i dari matriks identitas I_n). Trayektori dari sistem (8a) akan berada pada *orthan* $\mathbb{R}_+^n$ hanya jika $D^\alpha x(0) = Ae_i \geq 0$, yang berakibat $a_{ij} \geq 0$ untuk $i \neq j$. Yang berarti A merupakan matriks Metzler. Dengan analogi yang sama, untuk $x_0 = 0$ diperoleh $D^\alpha x(0) = Bu(0) \geq 0$, yang berakibat $B \in \mathbb{R}_+^{NxM}$ untuk sebarang $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$. Dari (8b), untuk $u(t) = 0, t \geq 0$ diperoleh $y(0) = Cx_0 \geq 0$ yang berakibat $C \in \mathbb{R}_+^{pxN}$ untuk sebarang $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$. Kemudian asumsikan $x_0 = 0$, dari (8b) diperoleh $y(0) = Du(0) \geq 0$ yang berakibat $D \in \mathbb{R}_+^{pxm}$ untuk sebarang $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$.

Dalam menganalisa suatu sistem, terkadang cukup diteliti variabel input dan kondisi awalnya saja, untuk menjustifikasi positivitas dari varibel outputnya. Berikut ini disajikan definisi dari positif eksternal, serta matriks impulse respon.

Definisi 24 (Kaczorek, 2008 : 226)

Sistem linier fractional waktu kontinu (8) dikatakan positif eksternal (*externally* *positive*) jika untuk semua input $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$ dan $x_0 = 0$ maka variabel output $y(t) \in \mathbb{R}_+^P, t \geq 0$.

Definisi 25 (Kaczorek, 2011 : 36)
Output dari sistem fractional single-input single-output (SISO) dengan kondisi awal 0, untuk Dirac impulse $u(t) = \delta(t)$ disebut impulse respon dari sistem.

Lemma 26
Matriks impulse respon dari sistem (8) dinotasikan dengan $g(t) \in \mathbb{R}^{pxm}$ adalah

$$g(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t), \text{untuk } t \geq 0 . \quad (27)$$

Bukti
Subsitusikan (3) ke (2b) sehingga untuk $x_0 = 0$, $u(t) = \delta(t)$, dan $y(t) = g(t)$ diperoleh

$$y(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$
$$= C\Phi(t)B + D\delta(t), \text{untuk } t \geq 0.$$

Syarat cukup dan perlu agar sistem linier fractional waktu kontinu dikatakan positif eksternal disajikan dalam teorema dibawah ini:

Teorema 28 (Kaczorek, 2008 : 226)
Sistem linier fractional waktu kontinu (8) adalah positif eksternal (*externally positive*) jika dan hanya jika matriks impulse respon (27) nonnegative, i.e. $g(t) \in \mathbb{R}_+^{pxm}, t \geq 0$.

Bukti
Karena matriks impulse respon pada sistem (8) telah diketahui, maka untuk sebarang input $u(t)$, variabel output $y(t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y(t) = \int_0^t g(t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad (29)$$

dengan perhitungan langsung ataupun metode grafik. Dari lemma 26, Variabel output $y(t)$ dari sistem (8) dapat dinyatakan dalam bentuk (29), yaitu:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Apabila kondisi $g(t) \in \mathbb{R}_+^{pxm}$ untuk $t \geq 0$ dipenuhi, maka dari (29) disimpulkan $y(t) \in \mathbb{R}_+^P, t \geq 0$ untuk setiap input $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$.

Reachability Sistem Linier Fractional Waktu Kontinu

Terkadang untuk mendesain suatu sistem, diperlukan suatu varibel input yang mengendalikan state awal, menuju state yang dikehendaki. Hal ini perlu dilakukan, terkait sistem yang telah terbentuk, apakah sudah benar-benar optimal dalam aspek tertentu. Oleh karena itu, berikut ini disajikan definisi sistem yang *reachable*.

Definisi 29 (Kaczorek, 2008 : 226)
State $x_f \in R_+^N$ dari sistem linier fractional (8) dikatakan *reachable* (dapat dicapai) pada waktu t_f jika terdapat suatu input $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \in [0, t_f]$ yang mengendalikan state pada sistem (8), mulai dari state awal yang bernilai 0, i.e. $x_0 = 0$ ke x_f. Jika setiap state $x_f \in R_+^N$ *reachable* pada waktu t_f, maka sistem dikatakan tercapai pada waktu t_f. Jika untuk setiap state $x_f \in R_+^N$ terdapat waktu t_f sedemikian hingga state dalam keadaan *reachable*, maka sistem (8) dikatakan *reachable*.

Mengenai syarat cukup dan perlu sistem (8) dikatakan *reachable* dipaparkan dalam beberapa teorema dibawah ini:

Teorema 30 (Kaczorek, 2008 : 226)
Sistem linier fractional dengan waktu kontinu (8) adalah *reachable* pada waktu t_f jika matriks

$$R(t_f) = \int_0^t \Phi(\tau)\, BB^T\Phi^T(\tau)d\tau \quad (31)$$

adalah matriks monomial. Lebih lanjut, variabel input yang mengendalikan state pada sistem (8) dari $x_0 = 0$ menuju x_f, yaitu

$$u(t) = B^T\Phi^T(t_f - t)R^{-1}(t_f)x_f. \quad (32)$$

Bukti
Diketahui bahwa matriks (31) merupakan matriks monomial, maka $R^{-1}(t_f) \in \mathbb{R}_+^{NxN}$ dan variabel input yang didefinisikan (32) merupakan vektor non-negatif, i.e. $u(t) \in R_+^m, t \geq 0$. Dari (10) untuk $x_0 = 0, t = t_f$, (31) dan (32) diperoleh

$$x(t_f) = \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau)BB^T\Phi^T(t_f - \tau)d\tau R^{-1}(t_f)x_f$$
$$= \int_0^{t_f} \Phi(\tau)BB^T\Phi^T(\tau)d\tau R^{-1}(t_f)x_f$$
$$= R(t_f)R^{-1}(t_f)x_f = x_f.$$

Terlihat variabel input (32) mengendalikan state dari sistem (8) dari $x_0 = 0$ menuju x_f.

Teorema 33 (Kaczorek, 2008 : 227)
Jika $A = diag[a_1, a_2, \dots, a_N] \in \mathbb{R}_+^{NxN}$, $B \in \mathbb{R}_+^{Nxm}$ adalah matriks monomial, maka sistem fractional derivative (8) adalah *reachable*.

Bukti
Dari persamaan (12), apabila matriks A adalah matriks diagonal, jelas bahwa matriks $\Phi(t)$ dan matriks $\Phi(t)B$ adalah monomial. Persamaan (31) juga dapat ditulis dalam bentuk

$$R(t_f) = \int_0^t \Phi(\tau)\, B(\Phi(\tau)B)^T d\tau, \quad (34)$$

dan juga merupakan matriks monomial. Dengan demikian, dari teorema 30, dapat disimpulkan bahwa sistem linier fractional (8) adalah *reachable*.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum solusi dari sistem linier fractional waktu kontinu diperoleh dari transformasi Laplace (Teorema 9). Syarat cukup dan perlu suatu sistem fractional dapat dikatakan internal positif atau eksternal positif telah diberikan pada teorema 23 dan 28. Syarat cukup sistem linier fractional waktu kontinu dikatakan *reachable* disajikan pada teorema 33.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Dzieliński, D. Sierociuk, and G. Sarwas,. (2009). *Ultracapacitor parameters identification based on fractional order model*. *Proc ECC'09* 1. CD-ROM (2009).

[2] Chen, C. T. (1984). *Linier System Theory and Design.* New york: CBS COLLEGE PUBLISHING.

[3] Kaczorek, T. (2002). *Positive 1D and 2D Systems.* London: Springer-Verlag.

[4] Kaczorek, T. (2008). *Fractional Positive Continuous-Time Linier Systems And Their Reachability.* Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2008, Vol. 18, No. 2, 223-228. DOI: 10.2478/v10006-008-0020-0.

[5] Kaczorek, T. (2011). *Selected Problems of Fractional Systems Theory.* Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.

[6] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations.* London: ACADEMIC PRES