EMPAT MODEL APROKSIMASI BINOMIAL HARGA SAHAM MODEL BLACK-SCHOLES

Abdul Aziz

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: abdulaziz_uinmlg@yahoo.com

Abstrak

Kami akan menyajikan empat bentuk nilai parameter-parameter *u, d,* dan *p* dalam model Binomial harga saham, yang dihasilkan dengan menggunakan penyamaan ekspektasi dan variansi model diskrit dengan kontinu. Metode pertama menggunakan asumsi $u\ .\ d = 1$, yang mana metode ini dapat menghasilkan tiga bentuk solusi untuk parameter-parameter *u, d,* dan *p* dalam model Binomial harga saham. Metode kedua menggunakan asumsi $p = 0{,}5$. Dari kedua metode ini ternyata dapat dihasilkan empat bentuk solusi *u, d,* dan *p* yang berbeda dan akan dibandingkan hasilnya dalam pendekatan nilai option dalam model Binomial dengan model *Black-Scholes.*

Kata kunci: aproksimasi, binomial, Black-Scholes, harga saham, parameter.

1. Pendahuluan

Call option pada sebuah saham merupakan sebuah perjanjian hak, tetapi bukan obligasi, untuk membeli saham tersebut pada suatu hari tertentu, *T* yang akan datang, yang diistilahkan sebagai *strike date* atau jatuh tempo (*date of expiration*), dengan harga tertentu *K*, yang diistilahkan sebagai *strike price* atau exercise price. Sebaliknya, *put option* pada sebuah saham merupakan sebuah perjanjian hak untuk menjual saham pada suatu hari tertentu yang akan datang dengan harga tertentu pula (Stampfli, J., Goodman, V., 2001)

Tentu saja, pemegang *option* (*holder*) akan menggunakan atau mengabaikan hak pilihnya pada *option* tersebut, yang diistilahkan sebagai *exercise*, tergantung pada harga saham di pasar bebas pada waktu *T* tersebut. Pemegang *call option* akan menggunakan haknya dengan membeli saham itu pada waktu *T* dengan harga *K* pada penulis *option (writer*), jika harga saham pada pasar bebas pada waktu T, S_T, lebih tinggi dibandingkan dengan *K*, harga saham pada *option*, sehingga menguntungkan bagi pemegang *option*. Dan, penulis *option* wajib untuk menjual sahamnya pada pemegang *option* dengan harga dan waktu sesuai perjanjian *option*. Sebaliknya, jika harga saham pada pasar bebas lebih rendah dibandingkan dengan *strike price* maka pemegang *option* dapat mengabaikan haknya, dan ia lebih baik membeli saham pada pasar bebas dengan harga yang lebih menguntungkan. Serupa untuk *put option*, pemegang *option* akan menjual sahamnya pada penulis *option* jika harga saham tersebut pada pasar bebas lebih rendah dari pada *strike price*. Dan, penulis *option* wajib membeli saham tersebut dari pemegang *option*. Sebaliknya, lebih baik menjual pada pasar bebas jika harga saham di pasar bebas lebih tinggi dari pada *strike price*.

Harga saham di pasar bebas pada waktu tertentu yang akan datang tidak dapat dipastikan oleh seseorang. Harga saham dapat mengalami perubahan turun naik setiap detiknya. Padahal, harga saham tersebut pada waktu tertentu sangat diperlukan oleh dua pihak, penulis *option* dan pemegang *option*, dalam pembuatan perjanjian *option*, sebagai perjanjian transaksi jual beli saham pada waktu yang akan datang. Banyak pendekatan numerik yang dilakukan oleh para ilmuan untuk memperkirakan harga saham di pasar bebas pada waktu tertentu dengan memodelkan gerakan fluktuasi harga saham, sehingga mereka dapat menentukan harga *option* yang mungkin menguntungkan bagi kedua pihak tersebut. Pemegang *option* akan memperoleh keuntungan, jika menggunakan hak *option*nya, dari nilai *option* (*option* value) yang diperoleh dari selisih harga saham pada pasar bebas dengan harga saham pada *option*, yang diistilahkan dengan *payoff,* V, setelah dikurangi dengan harga *option* (*option price*), yang diistilahkan dengan *profit* atau keuntungan (*return*). Sedangkan penulis *option* hanya memperoleh keuntungan sebesar harga atau biaya *option*, baik jika pemegang *option* menggunakan atau mengabaikannya. Jadi keuntungan atau kerugian yang diperoleh oleh pemegang *call option* pada waktu T (Hull, John C., 2003):

$$Profit = payoff - biaya\ option = V_C - C = max(K\text{-}S_T, 0) - C$$

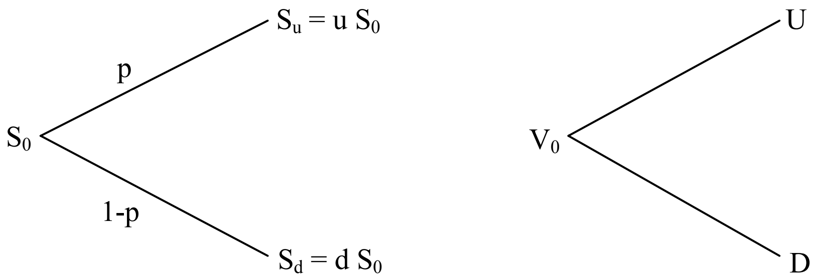
Sebaliknya, bagi pemegang *put option* akan mendapatkan keuntungan atau kerugian:

$$Profit = payoff - biaya\ option = V_P - C = max(S_T\text{-}K, 0) - P$$

Artinya, jika *profit* bernilai positif maka pemegang *option* mendapatkan keutungan, dan sebaliknya jika negatif merupakan kerugian yang maksimal sebesar biaya *option*.

2. Model Binomial Harga Saham

Harga saham pada pasar bebas kenyataannya akan selalu berubah naik atau turun dengan perubahan waktu. Kemungkinan dua arah perubahan inilah yang digunakan sebagai dasar model binomial. Misalkan harga saham pada saat $t = 0$, saat pembuatan *option*, adalah S_0 dan pada saat $t = T$ akan naik dengan peluang p menjadi S_u atau akan turun dengan peluang $1\text{-}p$ menjadi S_d, Sehingga nilai *option* pada saat $t = 0$, saat pembuatan *option*, adalah V_0 dan pada saat $t = T$ akan naik menjadi U atau akan turun menjadi D.



GAMBAR 1. Grafik perubahan harga saham dan harga *option*

Permodelan matematika diharapkan dapat membantu kita untuk memahami keadaan sekarang dan prediksinya pada waktu yang akan datang. Oleh karena itu, agar model binomial ini dapat berhasil dengan lebih baik maka harus sesuai dengan keadaan dunia nyata. Masalah yang dihadapi sekarang adalah bagaimana kita memilih p, u, dan d sedemikian hingga model binomial ini mendekati pada keadaan dunia nyata.

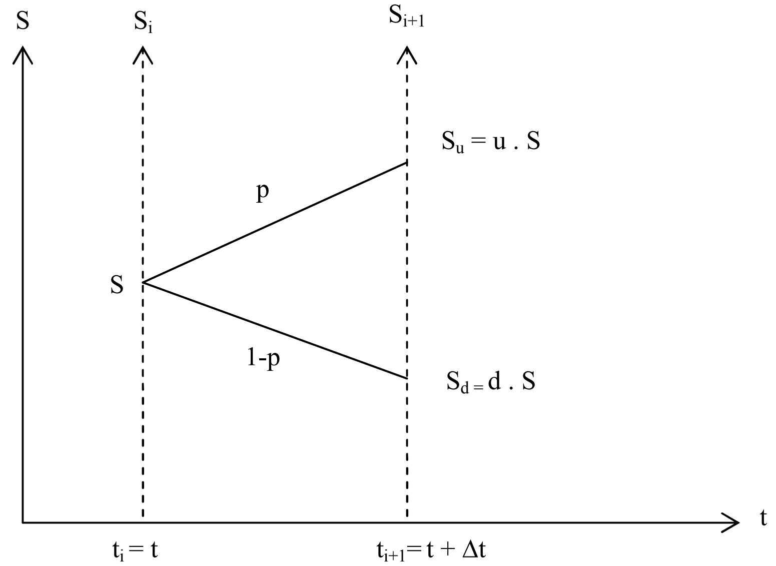
Kita mulai dengan diskritisasi, yaitu menjadikan waktu kontinu t menjadi diskrit dengan menggantikan t oleh waktu yang sama lamanya katakanlah t_i. Misalkan kita gunakan notasi berikut:

M : banyaknya selang waktu, $\Delta t := \dfrac{T}{M}$

$t_i\ : i\ .\ \Delta t, \quad i = 0, 1, \ldots, M$

$S_i : S(t_i)$

Selanjutnya bidang (S,t) diwakili oleh garis-garis lurus paralel dengan jarak Δt. Dan kita ganti nilai-nilai kontinu S_i sepanjang paralel $t = t_i$ dengan nilai-nilai diskrit S_{ji}, untuk semua i dan j yang sesuai. Untuk lebih memahami lihat gambar 2. Gambar ini menunjukkan sebuah hubungan grid, katakanlah perubahan dari t ke $t+\Delta t$, atau dari t_i ke t_{i+1}.



GAMBAR 2. Prinsip metode binomial

Sehingga asumsi-asumsi yang digunakan dalam permodelan ini adalah (Figlewski, Stephen, 1990):

(A1) Harga S, sebagai harga awal, selama setiap periode waktu Δt hanya dapat berubah dalam dua kemungkinan yaitu naik menjadi S_u atau turun menjadi S_d dengan $0 < d < u$. Di sini u dan d masing-masing merupakan faktor perubahan naik dan turun yang konstan untuk setiap Δt.

(A2) Peluang perubahan naik adalah p, P(naik) = p. Sehingga P(turun) = $1 - p$.

(A3) Ekspektasi harga saham secara acak kontinu, dengan suku bunga bebas resiko r, dari S_i pada waktu t_i menjadi S_{i+1} pada waktu t_{i+1} adalah:

$$E(S_{i+1}) = S_i . e^{r\Delta t} .$$

Asumsi selanjutnya adalah tidak ada pembayaran dividen selama periode waktu tersebut. Jika ada pembayaran dividen, q, maka persamaan (2.1) menjadi $E(S_{i+1}) = S_i . e^{(r-q)\Delta t}$
Dengan model binomial kita bisa membangun skema (*tree)* untuk fluktuasi harga saham secara diskrit.

Dari gambar 3, kita misalkan harga saham pada saat $t = t_0$ adalah $S_0 = S_{00} = S$, dan harga saham pada saat $t = t_1$ adalah $S_{01} = Sd$ dan $S_{11} = Su$. Sehingga secara umum harga saham pada saat $t = t_i$ terdapat i+1 kemungkinan dengan rumus umum

$$S_{ji} = S_0 u^j d^{i-j} ,\ i = 0,1,...,M \text{ dan } j = 0,1,...i. \quad (1)$$

Sehingga diperoleh nilai-nilai option, untuk *European call option*

$$V_{jM} = \max(S_{jM} - K, 0) ,$$

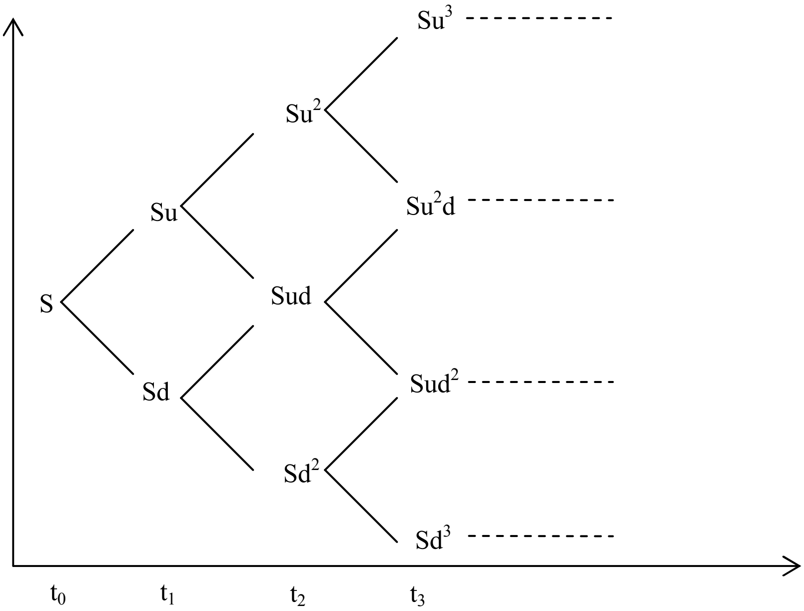
dan untuk *European put option*

$$V_{jM} = \max(K - S_{jM}, 0) .$$

Pada *American Option*, kita bisa meng-*exercise* sebelum jatuh tempo, $t \le T$, sehingga perlu juga untuk menghitung nilai-nilai option untuk t_i dimana $i = M\text{-}1, M\text{-}2,...,0,$ karena ada kemungkinan nilai-nilai option di waktu-waktu tersebut lebih baik dari pada pada waktu jatuh temponya. (Ross, Sheldon M., 1999)

Persamaan (1) adalah tidak rekursif, artinya perhitungan yang memerlukan waktu relatif lama, sehingga perlu adanya bentuk rekursif yang diperoleh sebagai berikut, dengan bantuan persamaan

$$E(S_{i+1}) = S_i e^{r\Delta t}\,. \tag{2}$$



GAMBAR 3. Skema fluktuasi harga saham secara binomial

Sedangkan

$$S_{ji}e^{r\Delta t} = E(S_{j,i+1}) = pS_{ji}u + (1-p)S_{ji}d = pS_{j+1,i+1} + (1-p)S_{j,i+1}\,. \tag{3}$$

Sehingga bentuk rekursif untuk nilai option, *V,*

$$V_{ji} = e^{-r\Delta t}E(V_{j,i+1}) = e^{-r\Delta t}\left(V_{ji}e^{r\Delta t}\right) = e^{-r\Delta t}\left(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}\right). \tag{4}$$

Jadi, nilai-nilai option untuk *European Call Option*

$$V_{jM} = \max(S_{jM} - K, 0), \text{ dan}$$
$$V_{ji} = e^{-r\Delta t}\left(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}\right)$$

dan untuk *European Put Option*

$$V_{jM} = \max(K - S_{jM}, 0), \text{ dan}$$
$$V_{ji} = e^{-r\Delta t}\left(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}\right),$$

sedangkan untuk *American Call Option*

$$V_{jM} = \max(S_{jM} - K, 0), \text{ dan}$$
$$V_{ji} = \max\left\{\max(S_{ji} - K, 0), e^{-r\Delta t}\left(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}\right)\right\}$$

dan untuk *American Put Option*

$$V_{jM} = \max(K - S_{jM}, 0), \text{ dan}$$
$$V_{ji} = \max\left\{\max(K - S_{ji}, 0), e^{-r\Delta t}\left(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}\right)\right\}$$

untuk $i = 0,1,\ldots,M$ dan $j=0,1,\ldots,i$.

3. Metode I, dengan asumsi u.d = 1

Untuk menentukan tiga parameter yang belum diketahui, *u, d,* dan *p,* diperlukan tiga persamaan, yaitu (Stampfli, J., Goodman, V., 2001):

(P.1) Menyamakan ekspektasi harga saham model diskrit dengan model kontinu.
(P.2) Menyamakan variansi model diskrit dengan model kontinu.
(P.3) Menyamakan $u \,.\, d = 1$.

Konsekuensi dari asumsi (A1) dan (A2) untuk model diskrit ini adalah

$$E(S_{i+1}) = pS_i u + (1-p)S_i d = S_i\left(pu + (1-p)d\right).$$

Di sini S_i adalah sebuah nilai sebarang untuk t_i, yang berubah secara acak menjadi S_{i+1}, sehingga sesuai kedua asumsi tersebut persamaan (2) dan (3) memberikan

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d\ .$$

Ini merupakan persamaan pertama yang diperlukan untuk menentukan *u, d, p*. Selanjutnya perhatikan bahwa dengan menyelesaikan persamaan (4) untuk *p* akan diperoleh:

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d = pu + d - pd = p(u-d) + d$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}. \qquad (5)$$

Karena p merupakan peluang yang harus memenuhi $0 \le p \le 1$ maka haruslah $e^{r\Delta t} - d \le u - d$ atau $e^{r\Delta t} \le u$ dan $u - d > 0$ atau $d \le u$, sehingga diperoleh

$$d \le e^{r\Delta t} \le u.$$

Pertidaksamaan-pertidaksamaan ini berhubungan dengan gerakan naik dan turunnya harga aset terhadap suku bunga bebas resiko r. Pertidaksamaan terakhir ini bukanlah merupakan asumsi baru tetapi merupakan prinsip no-arbitrage bahwa $0 < d < u$.

Selanjutnya kita menghitung variansi. Dari model kontinu kita terapkan hubungan

$$E(S_{i+1}^2) = S_i^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}. \qquad (6)$$

Persamaan (2) dan (6) menghasilkan variansi

$$Var(S_{i+1}) = E(S_{i+1}^2) - \left(E(S_{i+1})\right)^2 = S_i^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - S_i^2 e^{2r\Delta t} = S_i^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1).$$

Di sisi lain, dengan menggunakan persamaan (3) dan (4), varian untuk model diskrit memenuhi

$$Var(S_{i+1}) = E(S_{i+1}^2) - \left(E(S_{i+1})\right)^2 = p\left(S_i u\right)^2 + (1-p)\left(S_i d\right)^2 - \left(S_i\left(pu + (1-p)d\right)\right)^2$$

$$= S_i^2\left(pu^2 + (1-p)d^2\right) - \left(S_i e^{r\Delta t}\right)^2 = S_i^2\left(pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}\right) \qquad (7)$$

Sehingga dengan menyamakan hasil kedua variansi tersebut, persamaan (6) dan (7), menghasilkan

$$S_i^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) = S_i^2\left(pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}\right)$$

$$e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) = pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\Delta t}$$

$$e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2$$

$$e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} = p\left(u^2 - d^2\right) + d^2$$

$$p = \frac{e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - d^2}{u^2 - d^2} \qquad (8)$$

Selanjutnya, dengan menyamakan persamaan (5) dan (8) serta misalkan kita memilih menyamakan $u \,.\, d = 1$ akan dihasilkan

$$\frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - d^2}{u^2 - d^2}$$

$$\frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} = \frac{e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - d^2}{(u-d)(u+d)}$$

$$(u+d)\left(e^{r\Delta t} - d\right) = e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - d^2$$

$$ue^{r\Delta t} + de^{r\Delta t} - ud - d^2 = e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - d^2$$

$$\begin{aligned}
(u+d)e^{r\Delta t} - 1 - d^2 &= e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - d^2 \\
(u+d)e^{r\Delta t} - 1 &= e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \\
(u+d)e^{r\Delta t} - 1 &= e^{(r+\sigma^2)\Delta t} e^{r\Delta t} \\
(u+d-e^{-r\Delta t})e^{r\Delta t} &= e^{(r+\sigma^2)\Delta t} e^{r\Delta t} \\
u+d-e^{-r\Delta t} &= e^{(r+\sigma^2)\Delta t} \\
u+\frac{1}{u}-e^{-r\Delta t} &= e^{(r+\sigma^2)\Delta t} \\
u^2+1-ue^{-r\Delta t} &= ue^{(r+\sigma^2)\Delta t} \\
u^2+1-ue^{-r\Delta t}-ue^{(r+\sigma^2)\Delta t} &= 0 \\
u^2-u\left(e^{-r\Delta t}+e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)+1 &= 0 \\
u^2-u\left(e^{-r\Delta t}+e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)+1 &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

Dengan memisalkan $\beta = \frac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t}+e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)$ persamaan (9) menjadi persamaan kuadrat yang lebih sederhana yaitu

$$u^2 - 2\beta u + 1 = 0$$

dengan akar-akar $u = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ dimana $\beta^2 - 1 > 0$.

Karena $d < u$ maka kita pilih $u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$ sehingga diperoleh nilai untuk *u, d* dan *p* yaitu

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1},\ d=1/u,\ p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} \text{ dengan } \beta = \frac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t}+e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)$$

Selanjutnya, dengan aproksimasi bilangan eksponensial $e^x \approx 1+x$ akan diperoleh nilai untuk β

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 - r\Delta t + 1 + (r+\sigma^2)\Delta t\right) = \frac{1}{2}\left(2+\sigma^2\Delta t\right) = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

sehingga untuk nilai *u*

$$\begin{aligned}
u &= \left(1+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)+\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)^2-1} = 1+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+\sqrt{1+\sigma^2\Delta t+\frac{1}{4}\sigma^4\Delta t-1} \\
&= 1+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+\sqrt{\sigma^2\Delta t+\frac{1}{4}\sigma^4\Delta t} \approx 1+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+\sqrt{\sigma^2\Delta t} = 1+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t} \\
&\approx 1+\sigma\sqrt{\Delta t} \approx e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}
\end{aligned}$$

Sehingga kita memperoleh nilai *u, d* dan *p* sebagai

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},\ \text{dan. } p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\ .$$

Nilai-nilai dari parameter-parameter terakhir ini telah diperkenalkan oleh *Cox, Ross,* dan *Rubinstein*.[7]

Atau jika diinginkan juga untuk nilai *p*

$$\begin{aligned}
p &= \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} = \frac{e^{r\Delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{r\Delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}\,\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{r\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}-1}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}-1} \\
&\approx \frac{1+r\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}-1}{1+2\sigma\sqrt{\Delta t}-1} = \frac{r\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{\left(\frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t}+1\right)\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t}+1\right).
\end{aligned}$$

Sehingga kita memperoleh nilai *u, d* dan *p* yang lain sebagai

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},\ \text{dan } p = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t}+1\right).$$

4. Metode II, dengan asumsi p = 0.5

Sekarang, kita coba membandingkan metode di atas dengan memilih p = 0.5 pada (P.3) untuk menghitung ulang dalam menentukan nilai u dan d. Dan tetap dengan menyamakan ekspektasi dan rata-rata pada model kontinu dan diskritnya sebagaimana metode sebelumnya.

Dengan mensubstitusikan nilai p dada persamaan (5) diperoleh

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d = 0.5u + 0.5d = 0.5(u+d)$$

sehingga

$$u + d = 2e^{r\Delta t}$$

dan pada persamaan (8) diperoleh

$$p = \frac{e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - d^2}{u^2 - d^2} = \frac{1}{2}$$

sehingga

$$u^2 + d^2 = 2e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t}.$$

Misalkan $u = b + c$ dan $d = b - c$ maka diperoleh

$$u + d = b + c + b - c = 2b = 2e^{r\Delta t} \text{ atau } b = e^{r\Delta t}$$

dan

$$u^2 + d^2 = b^2 + 2bc + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = 2b^2 + 2c^2 = 2e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t}$$

atau

$$e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} = b^2 + c^2 = e^{2r\Delta t} + c^2$$

sehingga

$$c^2 = e^{\left(2r+\sigma^2\right)\Delta t} - e^{2r\Delta t} = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right)$$

atau

$$c = e^{r\Delta t}\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}.$$

Sehingga diperoleh

$$u = e^{r\Delta t} + e^{r\Delta t}\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} = e^{r\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right)$$

dan

$$d = e^{r\Delta t} - e^{r\Delta t}\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1} = e^{r\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right).$$

Jadi, dengan metode ini diperoleh

$$u = e^{r\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right), d = e^{r\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right), p = \frac{1}{2}.$$

5. Perbandingan Hasil Numerik

Dari kedua metode di atas ternyata dapat diperoleh empat bentuk solusi nilai-nilai untuk parameter-parameter u ,d, dan p dalam model Binomial, yaitu

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1},\ d=1/u,\ p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \text{ dengan } \beta = \tfrac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t} + e^{\left(r+\sigma^2\right)\Delta t}\right)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \text{ dan. } p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \text{ dan } p = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t} + 1\right).$$

$$u = e^{r\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right), d = e^{r\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right), p = \frac{1}{2}.$$

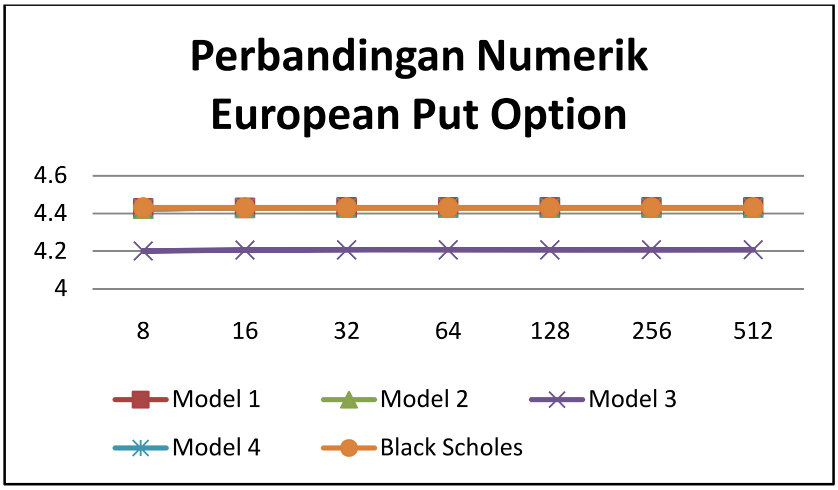
Berikut ini adalah tabel dan grafik hasil komputasi numerik untuk menghitung nilai *European Option* dengan keempat model binomial solusi aproksimasi parameter-parameter di atas yang juga diperbandingkan dengan nilai option dengan model *Black-Scholes*. Pada contoh di sini menggunakan data-data: $S = 5$, $K = 10$, $r = 0.06$. $\sigma = 0.3$, $T = 1$.

TABEL 1. Hasil Numerik Nilai *European Put Option*

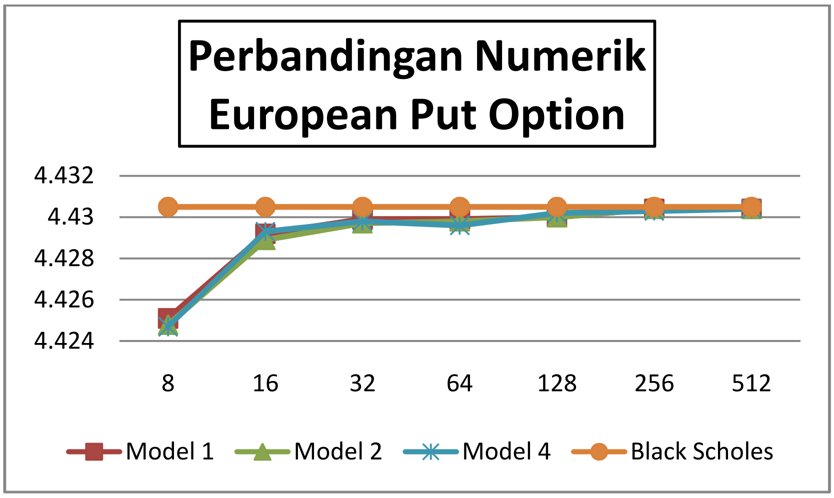
M	8	16	32	64	128	256	512
Model 1	4.4251	4.4292	4.4299	4.4299	4.4300	4.4304	4.4304
Model 2	4.4248	4.4289	4.4297	4.4298	4.4300	4.4304	4.4304
Model 3	4.2010	4.2057	4.2065	4.2065	4.2067	4.2071	4.2071
Model 4	4.4247	4.4293	4.4298	4.4296	4.4302	4.4303	4.4304
BS	4.4305	4.4305	4.4305	4.4305	4.4305	4.4305	4.4305

TABEL 2. Hasil Numerik Nilai *European Call Option*

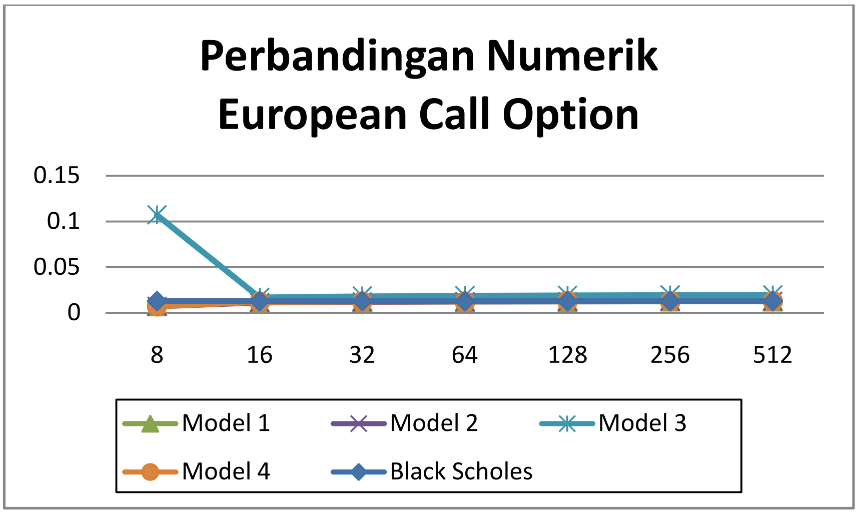
Periode	8	16	32	64	128	256	512
Model 1	0.0074	0.0116	0.0122	0.0123	0.0124	0.0127	0.0127
Model 2	0.0071	0.0112	0.0120	0.0122	0.0124	0.0127	0.0127
Model 3	0.107	0.0168	0.0183	0.0187	0.0190	0.0195	0.0195
Model 4	0.0071	0.0117	0.0121	0.0120	0.0126	0.0126	0.0128
BS	0.0128	0.0128	0.0128	0.0128	0.0128	0.0128	0.0128



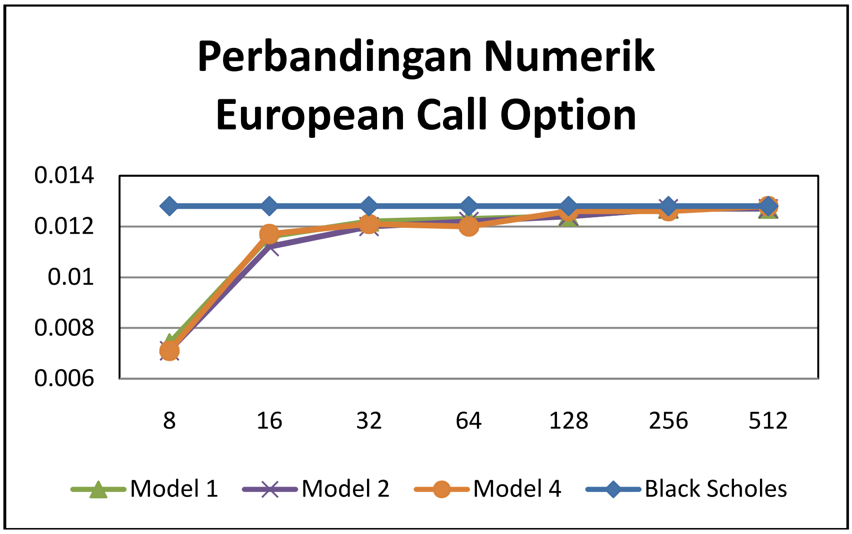
GAMBAR 4. Perbandingan Numerik *European Put Option* Model 1, 2,3 dan 4



GAMBAR 5. Perbandingan Numerik *European Put Option* Model 1, 2, dan 4



GAMBAR 6. Perbandingan Numerik *European Call Option* Model 1, 2,3 dan 4



GAMBAR 7. Perbandingan Numerik *European Call Option* Model 1, 2, dan 4

Dari tabel dan garfik perbandingan di atas dapat dilihat bahwa aproksimasi binomial model 3 sangat tidak sesuai atau paling lemah dan besar galatnya dibandingkan dengan ketiga model lainnya karena dihasilkan dengan melibatkan banyak aproksimasi dalam menghasilkan perumusannnya. Untuk kasus *European Put Option*, model 3 *under estimate*, sedangkan untuk kasus *European Call Option*, model 3 *over estimate.*

6. Kesimpulan

Model Binomial, kecuali model 3, dapat digunakan sebagai pendekatan diskritisasi dalam menentukan nilai *option*. Semakin besar banyaknya grid, M, maka metode ini akan semakin mendekati pada nilai *option* dengan model *Black-Scholes*.

Aproksimasi binomial model 3 sangat tidak sesuai atau paling lemah dan besar galatnya dibandingkan dengan ketiga model lainnya karena dihasilkan dengan melibatkan banyak aproksimasi dalam menghasilkan perumusannnya. Untuk kasus *European Put Option*, model 3 *under estimate*, sedangkan untuk kasus *European Call Option*, model 3 *over estimate.*

Daftar Pustaka

Figlewski, Stephen, (1990), *Theoretical Valuation Models,* dalam: *Financial Options From Theory To Practice*, Salomon Brothers Center for the Study of Financial Institutions, New York University.

Hull, John C., (2003), *Options, Futures, and Other Derivatives*, *fifth edition*, Prentice Hall, New Jersey.

Ross, Sheldon M., (1999), *An Introduction to Mathematical Finance*, *Option and Other Topics*, Cambridge University Press.

Stampfli, J., Goodman, V., (2001), *The Mathematics of Finance*, Brooks/Cole, USA.