SUPER EDGE-MAGIC LABELING PADA GRAPH ULAT DENGAN HIMPUNAN DERAJAT {1, 4} DAN *n* TITIK BERDERAJAT 4

Abdussakir

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia
e-mail: abdussakir1975@yahoo.co.id

Abstrak

Pelabelan total sisi ajaib super (edge magic total labeling) pada suatu graph (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan {1, 2, 3, …, p + q} sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku f(x) + f(xy) + f(y) = k, dengan k konstanta. Pelabelan total sisi ajaib yang memetakan V ke {1, 2, …, p} disebut pelabelan sisi ajaib super (super edge-magic labeling). Graph yang dapat dikenakan pelabelan sisi ajaib super disebut graph sisi ajaib super. Pada artikel ini akan dijelaskan bahwa graph ulat dengan himpunan derajat D = {1, 4} dan n titik berderajat 4, untuk n bilangan asli, adalah sisi ajaib super.

Kata kunci: *graph, pelabelan, total sisi ajaib*.

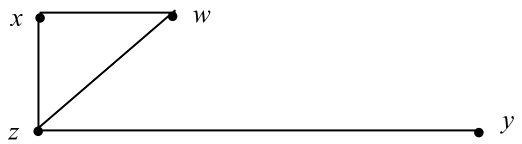
1. Pendahuluan

Graph G adalah pasangan (*V, E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di *E* disebut *ukuran* dari *G* dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika yang dibicarakan hanya satu graph, maka order dan ukuran masing-masing akan ditulis *p* dan *q*.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik *u* dan *v*. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graph *G*, maka *u* dan *v* disebut *terhubung langsung*, *v* dan *e* serta *u* dan *e* disebut *terkait langsung*, dan *u, v* disebut *ujung* dari *e*. *Derajat dari titik v* di graph *G*, ditulis $\deg_G v$, adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung dengan *v*. Titik yang berderajat satu disebut *titik ujung*. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$.

Himpunan derajat dari graph *G*, ditulis D_G, adalah himpunan yang memuat derajat semua titik di *G*. Pada graph *G* berikut,

G :



diperoleh bahwa $\deg_G w = 2$, $\deg_G x = 2$, $\deg_G y = 3$, dan $\deg_G y = 1$. Jadi himpunan derajat dari graph *G* adalah $D_G = \{1, 2, 3\}$. Jika yang dibicarakan hanya satu graph, maka himpunan derajat akan ditulis *D*.

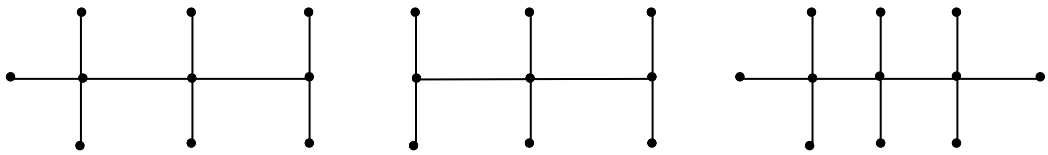
Jalan u-v dalam graph G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W : u = v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di *G*. v_0 disebut *titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*, dan *n* menyatakan panjang *W*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Jika $v_0 = v_n$, maka *W* disebut *jalan tertutup*. Jika semua sisi di *W* berbeda, maka *W* disebut *trail*. Jika semua titik di *W* berbeda, maka *W* disebut *lintasan*. Graph berbentuk lintasan disebut graph lintasan.

2. Graph Ulat

Graph ulat (*caterpillar*) adalah graph yang jika semua titik ujungnya dibuang akan menghasilkan lintasan. Perlu diingat kembali bahwa titik ujung adalah titik yang berderajat satu. Berikut ini adalah beberapa contoh graph ulat.



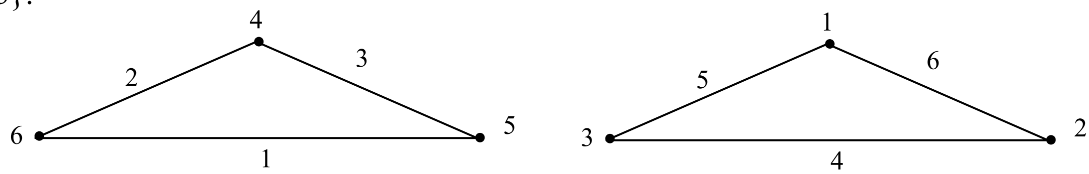
(a) (b) (c)

Himpunan derajat pada (a), (b), dan (c) masing-masing adalah {1, 3, 4}, {1, 3, 4}, dan {1, 4}. Pada (c) terdapat 3 titik berderajat 4. Pada artikel ini, yang akan dibahas adalah graph ulat dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4, untuk n bilangan asli. Graph ulat dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4 akan memuat sebanyak $2n$ titik ujung, untuk n bilangan asli.

Pelabelan total sisi ajaib (*edge-magic total labeling*) pada suatu graph (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke $\{1,2,3,\ldots, p+q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Konstanta k disebut bilangan ajaib. Pelabelan total sisi ajaib dapat dimaknai bahwa jumlah label suatu sisi dan label titik yang terkait langsung dengan sisi tersebut adalah sama, untuk semua sisi. Graph yang dapat dikenakan pelabelan total sisi ajaib disebut graph total sisi ajaib.

Pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan titik V ke $\{1,2,\ldots, p\}$ disebut pelabelan sisi ajaib super (*super edge-magic labeling)*. Graph yang dapat dikenakan pelabelan sisi ajaib super disebut graph sisi ajaib super.

Pada contoh berikut, gambar (a) adalah pelabelan total sisi ajaib dan gambar (b) adalah pelabelan sisi ajaib super. Konstanta pada gambar (a) adalah 12, sedangkan pada gambar (b) adalah 9. Perhatikan pada gambar (b), titik dipetakan pada himpunan {1, 2, 3}.



(a) (b)

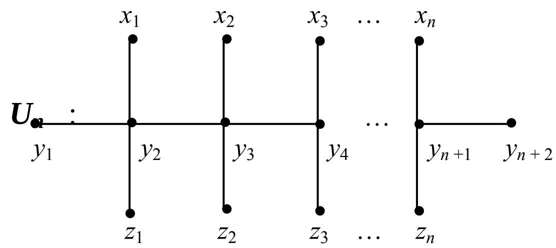
Pada artikel ini akan dijelaskan bahwa graph ulat dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4 adalah sisi ajaib super, untuk n bilangan asli. Dengan tujuan mempermudah penulisan, dalam artikel ini graph ulat dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4 akan disimbolkan dengan $\boldsymbol{U_n}$. Untuk membuktikan bahwa $\boldsymbol{U_n}$ adalah sisi ajaib super, perlu ditunjukkan adanya suatu fungsi bijektif f dari $V(\boldsymbol{U_n}) \cup E(\boldsymbol{U_n})$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, |V(\boldsymbol{U_n})| + |E(\boldsymbol{U_n})|\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k adalah konstanta. Selain itu, perlu ditunjukkan bahwa f memetakan $V(\boldsymbol{U_n})$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, |V(\boldsymbol{U_n})|\}$.

3. Pembahasan

Pembahasan bahwa graph ulat dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4 adalah sisi ajaib super, untuk n bilangan asli, disajikan dalam teorema berikut beserta buktinya, dan beberapa contoh sebagai aplikasi fungsi/pelabelan yang disajikan dalam teorema.

Teorema 1. *Graph ulat dengan himpunan derajat D =* ***{1, 4}*** *dan n titik berderajat 4 adalah sisi ajaib super, untuk n bilangan asli.*

Bukti: Graph ulat $\boldsymbol{U_n}$ dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4, n bilangan asli, dapat digambar sebagai berikut.



Berdasarkan gambar, himpunan titik pada $\boldsymbol{U_n}$ adalah

$$V(\boldsymbol{U}_n) = \{ x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+2}, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n\}$$

Dan himpunan sisi pada $\boldsymbol{U_n}$ adalah

$E(\boldsymbol{U}_n) = \{ x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_ny_{n+1}, y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n+1}y_{n+2}, z_1y_2, z_2y_3, \ldots, z_ny_{n+1}\}$.

Jadi, order dari $\boldsymbol{U_n}$ adalah

$$p(\boldsymbol{U_n}) = |V(\boldsymbol{U}_n)| = 3n + 2$$

dan ukuran dari $\boldsymbol{U_n}$ adalah

$$q(\boldsymbol{U_n}) = |E(\boldsymbol{U}_n)| = 3n + 1.$$

Jadi, $p(\boldsymbol{U_n}) + q(\boldsymbol{U_n}) = 6n + 3$.

Dalam hal ini terdapat dua kasus, yaitu untuk n bilangan asli ganjil dan n bilangan asli genap.

a. Pelabelan pada $\boldsymbol{U_n}$, dengan *n* Bilangan Asli Ganjil

Definisikan fungsi f dari $V(\boldsymbol{U}_n) \cup E(\boldsymbol{U}_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 6n + 3\}$ sebagai berikut.

$f(x_i) = \dfrac{3i+1}{2}$, untuk i ganjil dan $1 \le i \le n$.

$f(x_i) = \dfrac{3n+3i+3}{2}$, untuk i genap dan $1 \le i \le n$.

$f(y_i) = \dfrac{3i-1}{2}$, untuk i ganjil dan $1 \le i \le n + 2$.

$f(y_i) = \dfrac{3n+3i+1}{2}$, untuk i genap dan $1 \le i \le n + 2$.

$f(z_i) = \dfrac{3i+3}{2}$, untuk i ganjil dan $1 \le i \le n$.

$f(z_i) = \dfrac{3n+3i+5}{2}$, untuk i genap dan $1 \le i \le n$.

$f(y_iy_{i+1}) = 6n - 3i + 6$, $1 \le i \le n + 1$.

$f(x_iy_{i+1}) = 6n - 3i + 5$, $1 \le i \le n$.

$f(z_iy_{i+1}) = 6n - 3i + 4$, $1 \le i \le n$.

Dengan mengecek pada masing-masing interval indeks titik (genap atau ganjil) akan dapat ditunjukkan bahwa f adalah fungsi injektif. Karena f fungsi injektif dengan domain dan kodomain yang mempunyai banyak anggota sama dan berhingga, maka f adalah fungsi surjektif. Jadi f adalah fungsi bijektif.

(1) Untuk $1 \le i \le n + 1$ dan i ganjil diperoleh

$$f(y_i) + f(y_iy_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3i-1}{2}\right) + (6n - 3i + 6) + \left(\frac{3n+3(i+1)+1}{2}\right)$$
$$= \frac{15n+15}{2}$$

(2) Untuk $1 \le i \le n + 1$ dan i genap diperoleh

$$f(y_i) + f(y_iy_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3n+3i+1}{2}\right) + (6n - 3i + 6) + \left(\frac{3(i+1)-1}{2}\right) = \frac{15n+15}{2}$$

(3) Untuk $1 \le i \le n$ dan i ganjil diperoleh

$$f(x_i) + f(x_iy_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3i+1}{2}\right) + (6n - 3i + 5) + \left(\frac{3n+3(i+1)+1}{2}\right) = \frac{15n+15}{2}$$

(4) Untuk $1 \le i \le n$ dan i genap diperoleh

$$f(x_i) + f(x_iy_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3n+3i+3}{2}\right) + (6n - 3i + 5) + \left(\frac{3(i+1)-1}{2}\right) = \frac{15n+15}{2}$$

(5) Untuk $1 \le i \le n$ dan i ganjil diperoleh

$$f(z_i) + f(z_iy_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3i+3}{2}\right) + (6n - 3i + 4) + \left(\frac{3n+3(i+1)+1}{2}\right) = \frac{15n+15}{2}$$

(6) Untuk $1 \le i \le n$ dan i genap diperoleh

$$f(z_i) + f(z_iy_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3n+3i+5}{2}\right) + (6n - 3i + 4) + \left(\frac{3(i+1)-1}{2}\right) = \frac{15n+15}{2}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $\boldsymbol{U_n}$ adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib

$$k = \frac{15n+15}{2}.$$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa f memetakan $V(\boldsymbol{U}_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 3n + 2\}$. Jadi f adalah pelabelan sisi ajaib super pada $\boldsymbol{U_n}$ dengan n bilangan asli ganjil.

b. Pelabelan pada Un, dengan n Bilangan Asli Genap

Definisikan fungsi f dari $V(\boldsymbol{U}_n) \cup E(\boldsymbol{U}_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 6n + 3\}$ sebagai berikut.

$f(x_i) = \dfrac{3i+1}{2}$, untuk i ganjil dan $1 \le i \le n$.

$f(x_i) = \dfrac{3n+3i}{2}$, untuk i genap dan $1 \le i \le n$.

$f(y_i) = \dfrac{3i-1}{2}$, untuk i ganjil dan $1 \le i \le n + 2$.

$f(y_i) = \dfrac{3n+3i-2}{2}$, untuk i genap dan $1 \le i \le n + 2$.

$f(z_i) = \dfrac{3i+3}{2}$, untuk i ganjil dan $1 \le i \le n$.

$f(z_i) = \dfrac{3n+3i+2}{2}$, untuk i genap dan $1 \le i \le n$.

$f(y_iy_{i+1}) = 6n - 3i + 6$, $1 \le i \le n + 1$.

$f(x_iy_{i+1}) = 6n - 3i + 5$, $1 \le i \le n$.

$f(z_i y_{i+1}) = 6n - 3i + 4, \qquad 1 \leq i \leq n.$

Dengan mengecek pada masing-masing interval indeks titik (genap atau ganjil) akan dapat ditunjukkan bahwa f adalah fungsi injektif. Karena f fungsi injektif dengan domain dan kodomain yang mempunyai banyak anggota sama dan berhingga, maka f adalah fungsi surjektif. Jadi f adalah fungsi bijektif.

(1) Untuk $1 \leq i \leq n + 1$ dan i ganjil diperoleh

$$f(y_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3i-1}{2}\right) + (6n - 3i + 6) + \left(\frac{3n+3(i+1)-2}{2}\right) = \frac{15n+12}{2}$$

(2) Untuk $1 \leq i \leq n + 1$ dan i genap diperoleh

$$f(y_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3n+3i-2}{2}\right) + (6n - 3i + 6) + \left(\frac{3(i+1)-1}{2}\right) = \frac{15n+12}{2}$$

(3) Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i ganjil diperoleh

$$f(x_i) + f(x_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3i+1}{2}\right) + (6n - 3i + 5) + \left(\frac{3n+3(i+1)-2}{2}\right) = \frac{15n+12}{2}$$

(4) Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i genap diperoleh

$$f(x_i) + f(x_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3n+3i}{2}\right) + (6n - 3i + 5) + \left(\frac{3(i+1)-1}{2}\right) = \frac{15n+12}{2}$$

(5) Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i ganjil diperoleh

$$f(z_i) + f(z_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3i+3}{2}\right) + (6n - 3i + 4) + \left(\frac{3n+3(i+1)-2}{2}\right) = \frac{15n+12}{2}$$

(6) Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i genap diperoleh

$$f(z_i) + f(z_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \left(\frac{3n+3i+2}{2}\right) + (6n - 3i + 4) + \left(\frac{3(i+1)-1}{2}\right) = \frac{15n+12}{2}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $\boldsymbol{U_n}$ adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib

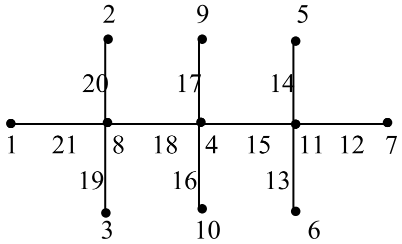
$$k = \frac{15n+12}{2}.$$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa f memetakan $V(\boldsymbol{U}_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 3n + 2\}$. Jadi f adalah pelabelan sisi ajaib super pada $\boldsymbol{U_n}$ dengan n bilangan asli genap.

Berdasarkan dua kasus pada n, maka diperoleh bahwa graph ulat $\boldsymbol{U_n}$ dengan himpunan derajat $\{1, 4\}$ dan n titik berderajat empat adalah sisi ajaib super, untuk semua n bilangan asli. ∎

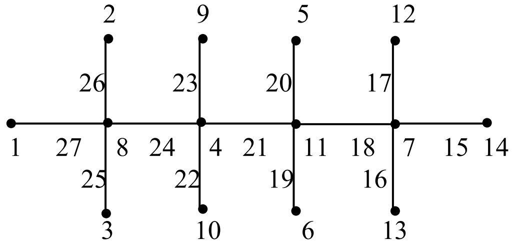
Berikut ini contoh pelabelan sis ajaib super pada graph ulat $\boldsymbol{U}_3$ dan $\boldsymbol{U}_4$ menggunakan teorema di atas. Perhatikan bahwa label titik dan sisi sesuai dengan rumus pada teorema.

U_3 :



Pada U_3, diperoleh bahwa bilangan ajaib adalah 30 = $\frac{15(3)+15}{2}$.

U_4 :



Pada U_4, diperoleh bahwa bilangan ajaib adalah 36 = $\frac{15(4)+12}{2}$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa bahwa graph ulat U_n dengan himpunan derajat {1, 4} dan n titik berderajat empat adalah sisi ajaib super, untuk semua n bilangan asli. Untuk n bilangan asli ganjil dan genap masing-masing bilangan ajaib adalah $k = = \frac{15n+15}{2}$ dan $k = \frac{15n+12}{2}$. Pelabelan seperti yang dijelaskan dalam teorema dimungkinkan bukan satu-satu pelabelan sisi ajaib super pada graph ulat U_n. Dengan demikian, disarankan kepada pembaca untuk mencari rumus pelabelan yang berbeda pada graph ulat U_n. Selain itu, karena graph ulat banyak jenisnya, maka disarankan kepada pembaca untuk melakukan penelitian pada beberapa jenis graph ulat yang lain.

Daftar Pustaka

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., (1976), *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press Ltd, London.

Chartrand, G. & Lesniak, L., (1986), *Graph and Digraph*, 2nd Edition, California: Wadsworth, Inc.

Miller, Mirka., (2000), Open Problems in Graph Theory: Labelings and Extremal Graphs, *Prosiding Konferensi Nasional X Matematika di Bandung*, Juli, 17-20.