# PERSAMAAN DIFFERENSIAL EKSAK DENGAN FAKTOR INTEGRASI

**Rosliana Siregar**
Dosen Koopertis Wil I Dpk FKIP-UISU
Rosliana2012@yahoo.com

**Abstrak.** Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hubungan persamaan differensial tak eksak dengan faktor integrasi. kajian penentuan faktor integrasi pada persamaan diferensial eksak dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian dari persamaan differensial. Persamaan diferensial eksak memiliki kasus persamaan diferensial tak eksak, di mana persamaan diferensial tak eksak ini dapat di ubah menjadi persamaan diferensial eksak. Dalam hal ini diperlukan konsep faktor integrasi untuk menyelesaikannya, sehingga dari persamaan diferensial tak eksak dapat di ubah menjadi persaman diferensial eksak. Hasil pembahasan dari penelitian ini membuktikan adanya hubungan antara persamaan diferensial eksak dengan faktor integrasi.

**Kata Kunci:** Persamaan Differensial Eksak, Tak Eksak, Faktor Integrasi

## PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah cabang matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam persamaan diferensial. Pada perkembangan ilmu persamaan diferensial sebagai model banyak dijumpai dalam bidang-bidang sains, teknologi (teknik), biologi, ekonomi, ilmu sosial, demografi, dan sebagainya. Persamaan diferensial digunakan sebagai alat untuk mengetahui kelakuan maupun sifat-sifat masalah yang ditinjau. Karena itu penting sekali mempelajari persamaan diferensial. Purcell E.J (1995, 241) menyatakan persamaan differensial adalah*"Sembarang persamaan dengan yang tidak diketahui berupa suatu fungsi dan daya yang mencakup turunan atau diferensial dan fungsi tidak diketahui"*. Kemudian ia memberi definisi formal dari persamaan diferensial, yaitu: *Andaikan y = f(x) terdefinisi di x dan andaikan dx didiferensialkan dari perubahan bebas x, menyatakan pertambahan sembarang dari x. Diferensial yang bersesuaian dengan dy dari perubahan bebas didiferensialkan oleh: dy = f(x) dx. Pengertian-pengertian differensial dapat didefenisikan sebagai berikut:* Definisi 1.1: *Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas.*

Bila ada suatu fungsi *F(x,y)*, maka suatu persamaan diferensial: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut eksak, sehingga $dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Jika diketahui rumus diferensial $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$, maka $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$; $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$, sehinggan berlaku ketentuan $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ pada persamaan diferensial eksak.

Ada bentuk persamaan diferensial yang tak eksak, tetapi bila dikalikan dengan suatu fungsi tertentu, maka akan diperoleh suatu persamaan yang eksak. Proses tersebut dinamakan dengan faktor integrasi. Faktor Integrasi dilakukan dengan tujuan sebagai berikut:

a. Untuk mengetahui bahwa adanya hubungan antara persamaan diferensial eksak dan persamaan diferensial tak eksak dengan faktor integral.
b. Untuk mengetahui syarat-syarat keeksakan suatu persamaan diferensial eksak.

c. Untuk mengetahui cara menentukan faktor integrasi pada persamaan diferensial eksak.
d. Untuk mengetahui pada saat kapan faktor integrasi itu digunakan.

Pada prinsipnya persamaan diferensial tak eksak dapat diubah menjadi persamaan diferensial eksak. Dalam masalah ini diperlukan konsep faktor integrasi untuk menyelesaikannya, sehingga persamaan diferensial tak eksak bisa menjadi persamaan diferensial eksak. Dari masalah tersebut bagaimana menyelesaikan masalah penentuan faktor integrasi pada persamaan diferensial eksak.

## PEMBAHASAN

### Persamaan Diferensial Eksak

**Definisi 1:** *Jika F suatu fungsi dari dua variabel real, dan F kontinu pada turunan pertama pada domain D, maka jumlah diferensial dF didefinisikan sebagai* $dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$ untuk semua $(x,y) \in D$.

**Definisi 2:** *Persamaan* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *disebut diferensial eksak pada domain D jika ada fungsi F dari dua variabel x,y, maka sedemikian hingga ketentuan tersebut sama dengan jumlah* $dF(x,y)$ *untuk* $\forall(x,y) \in D$.

*Sesuaikan definisi (2) dengan persamaan* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, *diperoleh*

$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$

$N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$

**Definisi 3:**

Apabila fungsi *f (x,y) = c*, maka persamaan diferensial orde satu berbentuk

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

disebut eksak, sehingga

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

dari definisi persamaan diferensial eksak dan hubungan (1) dapat dilihat bahwa

$$df(x,y) = c$$

jadi dengan mengintegralkan ini diperoleh bahwa solusi umum persamaan diferensial (1) adalah $f(x,y) = c$.

Selanjutnya dari definisi diferensial total dan hubungan (2) dapat dilihat bahwa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial y} = N \tag{3}$$

Bila *M* dan *N* mempunyai turunan- turunan parsial yang kontinu di bidang-bidang *xy*, maka dari (3) diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} \text{ dan } \frac{N}{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y} \tag{4}$$

Selanjutnya bila $f$ mempunyai turunan-turunan parsial ke dua yang kontinu, maka dari (4) diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

Syarat (5) merupakan syarat perlu agar persamaan diferensial (1) eksak. Dapat diperlihatkan bahwa syarat ini juga syarat cukup, sehingga hubungan (3) dapat dipergunakan untuk menentukan fungsi $f(x,y) = c$ yang merupakan solusi umum persamaan diferensial (1).

**Teorema 1:** Persamaan $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dengan $M, N$ kontinu pada turunan pertamanya $(M, N \in C^1(D))$ akan memenuhi kondisi berikut:

1. Bila $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ PD eksak di $D$, maka $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ untuk $\forall(x,y) \in D$
2. Sebaliknya bila $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ untuk $\forall(x,y) \in D$, maka dikatakan $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ merupakan PD eksak.

Jika $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ merupakan turunan total dari beberapa fungsi $F(x,y); M(x,y)$ dan $N(x,y)$, maka suatu persamaan diferensial dengan bentuk umum $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah merupakan sebuah persamaan diferensial eksak, dikatakan demikian karena turunan parsial dari $F(x,y)$ adalah masing-masing turunan parsial terhadap *x* dan *y*.

Turunan parsial campuran orde ke dua dari *F(x,y)* ada dan kontinu, sehingga $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$. Jadi jika sebuah persamaan diferensial berbentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah eksak, maka $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$.

Dapatlah ditunjukkan bahwa ini juga merupakan syarat cukup untuk keeksakan yaitu, $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \Leftrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah eksak.

**Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Eksak**

Jika sebuah persamaan diferensial adalah eksak, maka penyelesaiannya dapat diperoleh dengan metode berikut ini:

1. Integralkanlah $M(x,y)$ ke *x* menggantikan tetapan pengintegralan biasa dengan sebuah fungsi $f(y)$ dari *y*.
$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = G(x,y) + y$$
2. Diferensialkanlah $F(x,y) = G(x,y) + f(y)$ yang diperoleh dari langkah pertama ke *y* dan bandingkanlah dengan $N(x,y)$ dari persamaan diferensial yang akan diselesaikan untuk mendapatkan nilai $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$
$\Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}f(y) = \frac{\partial N}{\partial y}$
$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}f(y) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y}$
3. Integralkanlah $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$ ke *y* untuk mendapatkan $f(y)$.
$$\int \frac{\partial}{\partial y}f(y)dy = f(y)$$
Tidaklah perlu untuk mencakup tetapan pengintegralan biasa, karena tetapan itu dinyatakan pada langkah akhir dari penyelesaian.
4. Penyelesaian dari langkah-langkah pertama dan ke tiga, adalah:
$$F(x,y) = G(x,y) + f(y) + C = 0.$$
Jelaslah penyelesaian itu dapat juga diperoleh dengan mengintegralkan terlebih dahulu ke *y*.

**Persamaan Diferensial Tak Eksak**

Dalam beberapa kasus suatu persamaan diferensial yang tak eksak dapat dijadikan eksak dengan mengalikannya dengan suatu faktor, faktor seperti itu disebut faktor pengintegralan, karena faktor itu memungkinkan persamaan tersebut diintegralkan. Pada umumnya, menentukan faktor pengintegralan yang cocok untuk sebuah persamaan diferensial tertentu bukanlah soal yang mudah, namun demikian dapatlah ditunjukkan bahwa untuk setiap persamaan diferensial linear orde pertama memiliki faktor pengintegralan $e^{\int P(x)dx}$.

**Faktor Integrasi**

Integrasi merupakan proses kebalikan dari diferensiasi. Apabila didiferensiasikan, maka dimulai dengan suatu pernyataan dan melanjutkannya untuk mencari turunannya. Apabila diintegralkan, maka dimulai dengan turunannya dan kemudian mencari pernyataan asal integral ini.

Faktor integrasi ini digunakan untuk menyelesaikan PD orde satu tak eksak. Langkah yang dimaksud adalah merubah PD tak eksak menjadi eksak.

Bila $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, maka dapat ditentukan $\mu(x,y)$ sedemikian hingga $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ merupakan PD eksak.

Sekarang bagaimana menentukan $\mu(x,y)$, dapatlah digunakan teorema PD eksak. Bila persamaan $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ eksak, maka

$\Leftrightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial\mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y}$

$\Leftrightarrow \mu(x,y) = \frac{N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}$

adalah merupakan formula faktor integrasi secara umum.

Mempertimbangkan persamaan diferensial biasa dalam bentuk $y + P(x)y = Q(x)$, di mana $y = y(x)$ adalah fungsi yang tidak diketahui dari $x$, $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi yang diberikan.

Metode faktor yang mengintegrasikan bekerja dengan memutar sisi kiri ke dalam bentuk turunan dari suatu produk.

Pertimbangkan fungsi $M(x)$, kalikan ke dua sisi $y + P(x)y = Q(x)$ oleh $M\ (x)$: $M(x)y + M(x)P(x)y = M(x)Q(x)$, diinginkan sisi kiri berada dalam bentuk turunan dari suatu produk sehingga $M(x)y + M(x)P(x)y = M(x)Q(x)$ dapat ditulis sebagai $(M(x)y)' = M(x)Q(x)$.

Sisi kiri dalam $(M(x)y)' = M(x)Q(x)$ kini dapat terintegrasi dengan lebih mudah dengan menggunakan teorema dasar kalkulus, $y(x)M(x) = \int Q(x)M(x)dx + C$, di mana $C$ adalah konstan (lihat konstanta sembarang integrasi). Sekarang dapat dipecahkan untuk $y(x)$,

$$y(x) = \frac{\int Q(x)M(x)dx + C}{M(x)}$$

Tapi, untuk memecahkan secara eksplisit untuk $y(x)$, perlu ditemukan ekspresi untuk $M(x)$.

$(M(x)y)' = M(x)Q(x)$ menggunakan produk.

$(M(x)y)' = M'(x)y + M(x)y' = M(x)Q(x)$

Identifikasi istilah dalam $M(x)y + M(x)P(x)y = M(x)Q(x)$ dan jelas bahwa $F(x)$ mematuhi persamaan diferensial: $M'(x) = P(x)M(x)$ untuk mendapatkan $M(x)$, bagi ke dua belah pihak oleh $M(x)$:

$$\frac{M\prime(x)}{M(x)} - P(x) = 0$$

Persamaan $\frac{M\prime(x)}{M(x)} - P(x) = 0$ adalah dalam bentuk derivative logaritmik, memberikan $M(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Dapat dilihat bahwa mengalikan oleh $M(x)$ dan properti $M'(x) = M(x)f(x)$ sangat penting dalam memecahkan persamaan diferensial ini. *F(x)* disebut *faktor integrasi.* Dalam matematika, suatu faktor integrasi adalah suatu fungsi yang dipilih untuk memfasilitasi penyelesaian tertentu yang melibatkan persamaan diferensial. Hal ini biasanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, tetapi juga digunakan dalam kalkulus multivariabel, dalam hal ini sering mengalikan melalui oleh faktor mengintegrasikan yang memungkinkan sebuah diferensial tak eksak untuk dibuat menjadi sebuah diferensial eksak.

**Penyelesaian Persamaan Diferensial Eksak**

Suatu persamaan diferensial orde satu berbentuk

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Jika ruas kirinya adalah diferensial total atau diferensial eksak yaitu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

maka disebut persamaan diferensial eksak.

Dari suatu fungsi *u(x,y)* persamaan diferensial *M(x,y)dx + N(x,y)dy =0* dapat ditulis dengan *du = 0.*

Dengan pengintegralan akan diperoleh penyelesaian umum dari *g(y)y' = f(x)* yang berbentuk *u(x,y) = c*

Dengan membandingkan *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0* dan $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ dapat diketahui bahwa *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0* adalah persamaan diferensial eksak dari suatu fungsi *u(x,y)* sedemikian hingga;

$$a)\ \frac{\partial u}{\partial x} = M \qquad b)\ \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

Misal *M* dan *N* terdefinisikan dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam suatu daerah di bidang *xy* yang batas-batasnya berupa kurva tutup yang tidak mempunyai irisan mandiri *(self-intersections).* Dari

$$\text{a) } \frac{\partial u}{\partial x} = M \qquad \text{b) } \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

dengan asumsi kontinuitas, dapat disimpulkan bahwasanya dua turunan ke dua di atas adalah sama. Jadi,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

syarat ini bukan hanya perlu tetapi juga cukup untuk *Mdx* + *Ndy* menjadi diferensial total.

Jika *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0* eksak, maka fungsi *u(x,y)* dapat ditemukan dengan perkiraan atau dengan cara sistematis seperti berikut. Dari $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ dengan pengintegralan terhadap *x* diperoleh:

$$u = \int M dx + k(y)$$

Dalam pengintegralan ini, *y* dipandang sebagai suatu konstan, dan *k(y)* berperan sebagai konstan integrasi. Untuk menentukan *k(y)*, diturunkan $\partial u / \partial y$ dari $u = \int M dx + k(y)$, gunakan $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ untuk mendapatkan $\frac{dk}{dy}$, kemudian diintegralkan.

Rumus $u = \int M dx + k(y)$ diperoleh dari $\frac{\partial u}{\partial x} = M$. Secara sama bisa digunakan rumus $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ untuk mendapatkan rumus $u = \int N dy + l(x)$ yang mirip dengan $u = \int M dx + k(y)$ yaitu $u = \int N dy + l(x)$.

Untuk menentukan *l(x)* turunkan $\partial u / \partial x$ dari $u = \int N dy + l(x)$, gunakan $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ untuk mendapatkan *dl/dx*, kemudian diintegralkan.

**Hubungan Faktor Integrasi Pada Persamaan Diferensial Eksak dan Persamaan Diferensial Tak Eksak.**

Telah dibahas sebelumnya bahwa, persamaan diferensial tak eksak dapat diubah menjadi persamaan diferensial eksak, yaitu dengan mengalikan ke dua ruas persamaan dengan satu fungsi yang disebut dengan faktor integrasi.

Akan ditentukan cara mencari faktor integral untuk kejadian yang sangat khusus, yaitu yang merupakan fungsi *x* saja atau *y* saja.

Misalkan persamaan *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0* merupakan persamaan diferensial tak eksak, dengan faktor integral merupakan fungsi *x* saja, misalkan *v = v(x)*. Dengan demikian, *v(x)M(x,y)dx + v(x)N(x,y) = 0* merupakan persamaan-persamaan diferensial eksak, berarti;

$$\frac{\partial}{\partial y}(v(x)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v(x)N(x.y)\right)$$

atau dapat ditulis

$$v(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\ .$$

Dari persamaan tersebut diperoleh:

$$\frac{\frac{dv(x)}{dx}}{v(x)} = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

Karena diketahui, bahwa *v* merupakan fungsi *x* saja, maka

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

harus merupakan fungsi *x* saja, sehingga:

$$\ln v(x) = \int \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\,dx\,.$$

Selanjutnya dengan jalan yang sama jika *v* merupakan fungsi *y* saja, maka diperoleh:

$$\ln v(y) = \int \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}\,dy$$

Faktor integrasi digunakan pada saat persamaan diferensial tersebut tak eksak yaitu $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, sehingga digunakanlah faktor integrasi untuk mengubahnya menjadi persamaan diferensial eksak.

Pada penyelesaian soal-soal mengenai faktor integrasi, ada 2 (dua) hal yang harus diperhatikan, yaitu:

a. Pada soal-soal mengenai faktor integrasi, telah dicantumkan atau ditentukan jenis dari faktor-faktor integrasinya.
   Misalnya: mempunyai faktor integrasi hanya fungsi dari *x*.
   mempunyai faktor integrasi tergantung dari *y, u(y), u(x,y),* dan lain-lain.
b. Pada soal-soal mengenai faktor integrasi, tidak dicantumkan atau ditentukan faktor-faktor integrasinya, jadi harus dicari lagi jenis faktor yang sesuai dengan soal tersebut.

Dalam hal (a) dapat dimasukkan langsung jenis dari faktor integrasinya ke dalam persamaan: $u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$, sehingga harga faktor integrasi *u* dapat diperoleh .

Dalam hal (b) belum mempunyai rumus yang tepat untuk langsung memperoleh jenis dan harga dari faktor integrasi yang sesuai. Ada ketentuan-ketentuan untuk mencari jenis dan harga dari faktor integrasi. Ketentuan-ketentuan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Bila faktor integrasinya hanya tergantung dari *x*, maka:

$$u = u(x), \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sehingga rumus faktor integrasi menjadi:

$$u\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{du}{dx}-0 \text{ atau } \frac{du}{u}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx.$$

Sebaliknya bila suatu soal dari $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}$ terdapat fungsi adalah fungsi dari *x* saja, maka faktor integrasi hanya fungsi dari *x*.

2. Bila faktor integrasinya hanya tergantung dari *y* maka $u=u(y), \frac{\partial u}{\partial x}=0$ dan $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}$. Sehingga rumus faktor integrasi menjadi $u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0-M\frac{du}{dx}$ atau $\frac{du}{u}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M}dy$. Sebaliknya bila suatu soal harga dari $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M}$ terdapat fungsi, adalah suatu fungsi dari *y* saja, maka faktor integrasi hanya fungsi dari *y*.

**Penyelesaian Faktor Integrasi**

Jika $M(x,y)dx+N(x,y)=0$ tak eksak, maka dengan memperbanyak persamaan $M(x,y)dx+N(x,y)=0$ dengan suatu fungsi $u(x,y)$ bisa dijadikan persamaan diferensial eksak, sehingga $uMdx+uNdy=0$ adalah persamaan diferensial eksak sehingga berlakulah:

$$\frac{u\partial M}{\partial y}=\frac{\partial (uN)}{\partial x}$$

atau
$$\frac{u\partial M}{\partial y}+\frac{M\partial u}{\partial y}=\frac{u\partial N}{\partial x}+\frac{N\partial u}{\partial x}$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial u}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial y}$$

Dari persamaan ini harga *u* dapat dicari. Setelah harga *u* dimasukkan dalam persamaan $uMdx+uNdy=0$ terjadilah persamaan diferensial eksak.

**Mencari Faktor Integrasi**

Suatu persamaan diferensial $y^{-1}dx+2xdy=0$ adalah tidak eksak, tetapi bila dikalikan dengan *F(x,y) = y/x*, maka akan diperoleh persamaan diferensial eksak: $x^{-1}dx+2ydy=0$. Selanjutnya bila diselesaikan, maka akan diperoleh $\ln|x|+y^2=c$. Hal ini mengilustrasikan bahwa kadang-kadang suatu persamaan diferensial berbentuk *P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0* adalah tidak eksak, tetapi bisa dibuat eksak dengan mengalikan dengan fungsi (yang cocok) yang berbentuk *F(x,y)(≠0).* Fungsi ini disebut faktor integrasi dari *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0* .

Berdasarakan pengalaman, faktor integrasi bisa diperoleh dengan melakukan pemeriksaan. Untuk ini perlu diingat beberapa diferensial seperti dalam contoh

berikut. Dalam kasus-kasus khusus yang penting, faktor integrasi dapat ditentukan dengan cara yang sistematis seperti contoh berikut.
Contoh 1:
Selesaikan persamaan diferensial berikut : *xdy-ydx = 0*
Penyelesaian:
Pesamaan diferensial *xdy-ydx = 0* adalah bukan persamaan diferensial eksak. Suatu faktor integrasi yang cocok adalah $F = \frac{1}{x^2}$, sehingga diperoleh:

$$F(x)(xdy - ydx) = \frac{xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0; \qquad y = cx$$

Contoh 2:
Tentukan faktor-faktor integrasi yang lain dari persamaan diferensial pada contoh 1.
Penyelesaian:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy}$$

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

sehingga fungsi-fungsi

$$\frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}, dan \frac{1}{(x^2 + y^2)}$$

adalah faktor-faktor integrasi dari persamaan diferensial *xdy-ydx = 0*. Penyelesaian yang bersesuaian dengan faktor-faktor integral itu berturut-turut adalah:

$$\frac{x}{y} = c, \ln\left(\frac{y}{x}\right) = c, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = c.$$

Ke tiga penyelesaian tersebut secara esensial adalah sama karena masing-masing menyatakan keluarga garis lurus yang melalui titik asal.

Contoh 2 mengilustrasikan bahwa, jika terdapat satu faktor integral *F* dari persamaan diferensial *u(x,y) = c*, maka selalu dapat diperoleh faktor-faktor integral yang lainnya, karena *FPdx + FQdy* adalah diferensial *du* untuk suatu fungsi *u,* dan untuk sebarang *H(u).*

Diferensial yang lain adalah *H(FPdx + FQdy) = H(u)du*. Ini menunjukkan bahwa *H(u)F(x,y)* adalah faktor integral yang lain dari *u(x,y) = c*. Jika *F(x,y)* faktor integrasi yang lain dari *u(x,y) = c* , maka *FPdx + FQdx = 0* adalah suatu persamaan diferensial eksak. Jadi syarat keeksakan $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ menjadi $\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ)$.

Hal ini lebih komplek daripada persamaan *M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0* yang diselesaikan. Akan diamati suatu faktor integral yang hanya bergantung pada satu

variabel, katakan *x*. Jadi $\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ)$ menjadi $F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dF}{dx}Q + F\frac{\partial Q}{\partial x}$.
Dengan membagi dengan FQ dan pengurutan kembali, diperoleh:

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

**Kasus Persamaan Diferensial Tak Eksak**

Perhatikan persamaan diferensial *ydx-xdy=0.*
Terlihat bahwa *M=y* dan *N=-x*
sehingga $\partial M / \partial y = 1$
tetapi $\partial N / \partial x = -1$
Jadi persamaan diferensialnya tak eksak. Dari

$$u = \int M dx + k(y),$$

$$u = \int M dx + k(y)$$

$$= xy+k(y),$$

sehingga

$$\partial u / \partial y = x + k'(y)$$

ini harus sama dengan *N=-x*. Hal ini tidak mungkin, karena *k(y)* hanya fungsi dari *y* saja. Jika digunakan $u = \int N dy + l(x)$, maka akan menghasilkan hal yang sama. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak eksak yang demikian ini diperlukan metode lain. Jika suatu persamaan diferensial itu eksak, maka dapat diubah menjadi tak eksak dengan membagi dengan suatu fungsi tertentu.

**Persamaan Diferensial yang Dibuat Eksak**

(persamaan diferensial menggunakan faktor integrasi)
*M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0*

Persamaan: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \rightarrow$ tak eksak

$$F(x,y) = c$$

$$dF(x,y) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

Persamaan: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ tak eksak dan persamaan $dF(x,y) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$ adalah eksak, dan ke duanya adalah identik yang mempunyai solusi yang sama. Hal ini berarti koefisien dari *dx* dan *dy* dengan mempunyai perbandingan yang sama.

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{M(x,y)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N(x,y)} = \mu(x,y) \rightarrow \text{(merupakan faktor integrasi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu(x,y).M(x,y) \quad \Big| \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu(x,y).N(x,y)$$

Jadi persamaan diferensial yang tak eksak, jika dikalikan dengan faktor integrasinya $(\mu(x,y))$, maka akan menjadi eksak dan apabila tidak diketahui fungsi dari $\mu$ , maka masalah yang timbul yaitu akan mengalami kesulitan dalam menentukan $\mu(x,y)$ .

Contoh 3:

Tentukan solusi persamaan diferensial eksaknya dengan fungsi dari $\mu$ diketahui: *(x,y) dx + dy = 0.*

Diketahui: faktor integrasi fungsi dari *x*

Penyelesaian:

Faktor integrasi = $\mu(x)$

$M = x + y \qquad \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$

$\text{N} = 1 \qquad \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$

$$M(x,y)dx + N(x,y) \qquad = 0$$

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

$$\mu(x)(x+y)dx + \mu(x)(dy) = 0$$

(merupakan persamaan diferensial eksak)

Untuk menentukan $\mu(x)$:

Misal: $P(x,y) = \mu(x)(x+y)$

$Q(x, y = \mu(x))$

Karena Persamaan Diferensial Eksak, jadi:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\mu(x).(x+y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x))}{\mu_{(x)}}$$

$$\mu(x) = \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = 0$$

(persamaan diferensial dengan variabel dapat dipisahkan)

$$\mu(x) = \frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \Leftrightarrow \text{dx-}\frac{\partial \mu(x)}{\mu(x)} = 0$$

$$\int dx = \int \frac{\partial(\mu(x))}{\mu(x)}$$

$$x = \ln\ \mu(x) + c \rightarrow \mu(x) = \frac{e^x}{c} = ce^x$$

di sini *c* adalah sembarang konstanta, ambil *c = 1* $\rightarrow \mu(x) = e^x$

kembali ke persamaan: $e^x(x+y)dx + e^x dy = 0$ .

Diperiksa apakah terbukti benar eksak:

$$M(x,y) = e^x (x+y)$$
$$N(x,y) = e^x$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x , \frac{\partial N}{\partial x} \text{ (terbukti)}$$
$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + c(x)$$
$$F(x,y) = \int e^x dy + c(x) = e^x y + c(x)$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^x y + c^{'}(x,y) = M(x,y)$$
$$\mathrm{e}^x y + c^{'}(x) = e^x (x,y) = e^x x + e^x y$$
$$c^{'}(x) = e^x x$$
$$c(x) = \int c^{'}(x)dx = \int e^x x dx$$
$$c(x) = \int xe^x dx = \int xd\left(e^x\right)$$
$$c(x) = xe^x - \int e^x d(x) = xe^x - e^x + D$$
$$F(x,y) = 0$$
$$e^x y + c(x) = 0$$
$$e^x y + xe^x - e^x + D = 0$$

(merupakan solusi umum persamaan diferensial)

**PENUTUP**

Berdasarkan hasil pembahasan tersebut dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil pembahasan dapat membuktikan adanya hubungan antara persamaan diferensial eksak dengan faktor integrasi. Kaitannya yaitu dalam persamaan diferensial tak eksak, yang dalam hal ini faktor integrasi digunakan untuk mengubah persamaan diferensial tak eksak menjadi persamaan diferensial eksak.
2. Dikatakan persamaan diferensial eksak apabila memenuhi syarat berikut: $\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)dx \Leftrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.
3. Ada 2 (dua) cara menyelesaikan PD eksak, yaitu dengan menggunakan prosedur dalam teorema dan dengan teknik pengelompokan.
4. Faktor integrasi digunakan pada saat persamaan diferensial tersebut tak eksak yaitu $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, sehingga digunakanlah faktor integrasi untuk mengubahnya menjadi persamaan diferensial eksak.

**DAFTAR PUSTAKA**

Edwin J, Purcell. Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jilid II. Jakarta: Erlangga

Gazali, Wikaria. 2007. *Kalkulus Lanjutan Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Nababan, S. M. 1997. *Buku Materi Pokok Pendahuluan Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Karunika

Purcell E. J. 1996. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Erlangga: Jakarta

Stewart, James. 2001. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga
Supranto J. 1997. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis Buku 1 dan 2.* Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia: Jakarta
Wahyu, S. B. 2006. Persamaan Diferensial Edisi 1. Yogyakarta: Graha Ilmu
Weber, Jean E. 1999. *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi Edisi ke empat-jilid 2*. Jakarta: Erlangga