



VARIASI PEMODELAN ELEMEN HINGGA PADA ELEMEN BETON BERTULANG

Abdul Kadir

Jurusan Teknik Sipil Universitas Halu Oleo Kendari

Koresponden Author : kadir12340@yahoo.com

Info Artikel	ABSTRAK
Diajukan : 07 Mei 2019 Diperbaiki : 20 Mei 2019 Disetujui : 23 Mei 2019	<p>Beton adalah material yang heterogen dan ketika terbebani baik dalam kondisi layan maupun kondisi batas ultimit akan mengalami perilaku nonlinear bahan maupun geometri. Tujuan dari tulisan ini adalah untuk memaparkan perkembangan dan variasi pemodelan elemen dengan elemen hingga (model mikro). Kompleksnya perilaku elemen serta besarnya biaya untuk pengujian langsung maka pemodelan elemen dengan elemen hingga dibutuhkan. Model konstitutif seperti <i>compression softening</i>, <i>confinement</i>, <i>tension softening</i>, <i>tension stiffening</i>, <i>tension splitting</i>, lekat-gilincir, rayapan, retak, pemodelan tulangan dikombinasikan dengan formulasi berbasis elastisitas, platisitas, <i>damage model</i>, <i>fracture mechanics</i>, model <i>microplane</i>, serta kombinasi platisitas dan <i>damage</i> atau <i>fracture</i> model adalah karakter dan perilaku model elemen hingga.</p> <p>Kata Kunci : Beton bertulang, Elemen hingga, Model konstitutif, Perilaku nonlinier</p>

PENDAHULUAN

Model elemen hingga merupakan model mikro yang membutuhkan proses numerik yang besar dan kompleks. Model ini lebih menekankan pada karakteristik bahan dan model konstitutif elemen dan tidak mensyaratkan definisi kekakuan, kekuatan maupun deformasi. Ciri utama model elemen hingga adalah diskritisasi atau pembagian batang atau elemen menjadi elemen-elemen kecil (beton maupun tulangan) dengan bentuk tertentu. Antar diskritisasi/element satu dengan lainnya dihubungkan dengan titik nodal. Jumlah diskritisasi dipilih dengan mempertimbangkan akurasi dan konvergensi. Model elemen hingga dikenalkan pertama kali oleh Ngo dan Scoderlis [1] dengan menggunakan model retak diskrit. Kini pemodelan telah mengalami perkembangan signifikan baik variasi maupun keluasannya.

VARIASI PEMODELAN

2.1. Dasar pemodelan karakteristik material

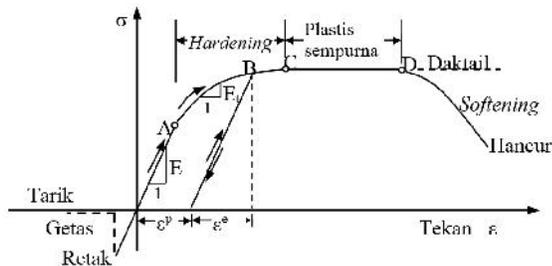
Pemodelan karakteristik bahan dalam elemen hingga dapat dikelompokkan dalam: 1) model yang berbasis pada elastisitas, 2) model yang berbasis pada platisitas, 3) model berbasis kerusakan

(*damage models*), 4) model yang berbasis kombinasi kerusakan-plastis (*plastic-damage model*) dan 5) model *microplane*.

Model elastis terdiri dari model elastis linier dan model elastis nonlinier. Model elastis linier adalah model paling sederhana dimana hanya mensyaratkan sedikit variabel (Modulus Young E dan rasio poisson ν). Model elastis nonlinier adalah model yang direpresentasikan oleh perubahan modulus baik modulus tangent maupun modulus sekan. Model yang terkategori model nonlinier elastic menurut Chen dan Saleeb [2] adalah model elastic Cauchy, *Hiper Elastic* atau *Green Elastic* dan *Hipo Elastic*. Model elastic Cauchy adalah model yang didasarkan pada fungsi regangan atau sebaliknya dan tidak dipengaruhi lintasan tegangan, berlaku pada pembebanan monotonik atau proporsional. Model hypo Elastic adalah model yang dinyatakan dengan inkremen tegangan-regangan atau model tegangan-regangan tangensial. Model Hiper Elastic adalah model dimana tegangan dinyatakan sebagai fungsi kerapatan energi regangan yang tidak dipengaruhi lintasan beban. Model *hypo* dan *hiper elastic* dipengaruhi oleh riwayat deformasi, memenuhi hukum termodinamika dan dapat menghitung beban besar pada bahan anisotropi. Kelemahan

kedua model ini adalah formulasi yang kompleks dalam memprediksi perilaku nonlinier beton pada level beban sedang hingga tinggi.

Dalam elemen hingga plastisitas selain digunakan untuk mendiskripsikan perilaku daktil juga digunakan untuk menganalisis perilaku getas bahan. Perilaku elastis-plastis bahan ketika dibebani aksial ditunjukkan dengan Gambar 1.



Gambar 1. Kurva tegangan-regangan uniaksial
Sumber : Chen, 1982

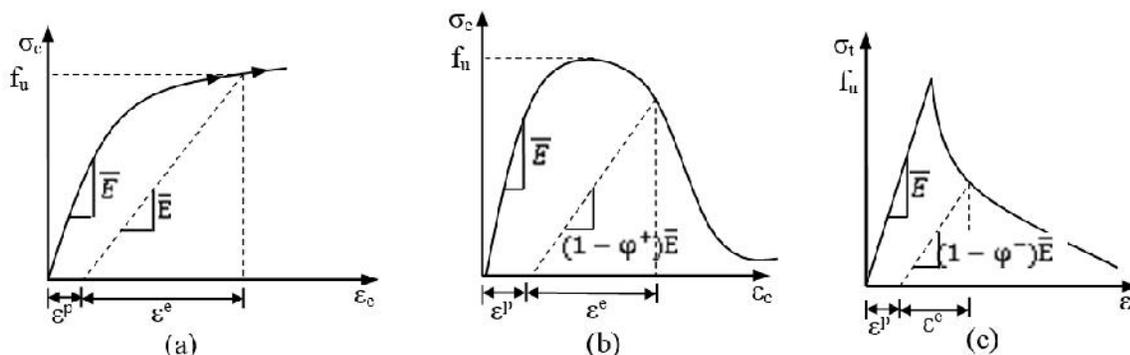
Karakteristik utama dari model-model plastisitas adalah regangan yang dinyatakan dengan regangan elastis (ϵ^e) dan regangan plastis (ϵ^p) sebagaimana Gambar 1 juga persamaan-persamaan konstitutifnya meliputi: kondisi/kriteria leleh dan fungsi runtuh (*yield condition and failure functions*), ketentuan lintasan (*flow rule*) dan hukum hardening (*hardening law*). Kriteria leleh adalah gambaran untuk menentukan permukaan kritis bahan apakah berada pada kondisi regangan elastis saja atau juga regangan elastis pada keadaan tegangan tertentu. Beberapa mode kriteria keruntuhan yang dapat digunakan untuk material beton seperti; von Mises, Moh-Coulomb, Drucker-Prager, Tresca-Guest, Lubliner dkk. [3] menyarankan menggunakan kombinasi kriteria

runtuh untuk memperoleh hasil-hasil yang lebih sesuai.

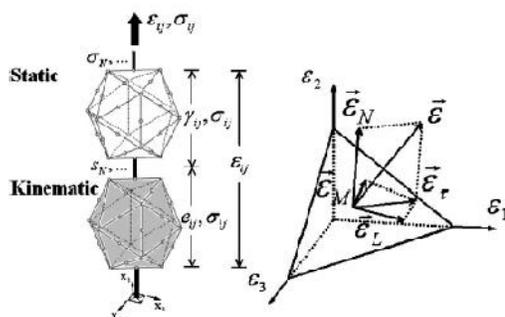
Model kerusakan didasarkan pada hukum termodinamik dan mekanisme internal terhadap perkembangan retak mikro dan rongga didalam bahan getas seperti beton. Kerusakan pada bahan dapat diidentifikasi dengan menggunakan parameter indeks kerusakan $0 < d < 1$ yang menunjukkan derajat degradasi dalam matriks kekakuannya. Dua variasi model ini yakni *isotropic damage model* dan *anisotropic damage model*.

Model *plastic damage* biasanya diformulasikan dengan konsep termodinamika dan diasumsikan sebagai formulasi kerusakan isotropic [3]. Formulasi dengan pemodelan kerusakan (*anisotropic damage*) dikembangkan oleh Voyiadjis [4]. Secara skematik kombinasi plastic-damage model ditunjukkan dengan Gambar 2.

Model *fracture plasticity* dipresentasikan oleh Cervenka dan Papanikolau [5], model plastis untuk beton tekan didasarkan pada permukaan runtuh Monotrey-Wiillam. Beton tarik didasarkan pada formulasi retak smear orthotropic dan pendekatan berkas retak (*crack band*). Kriteria keruntuhan menggunakan kriteria Rankin, *softening* eksponensial, dan dapat digunakan sebagai retak rotasi atau terkekang. Model *microplane* adalah model dimana tensor regangan pada suatu titik material diproyeksikan ke beberapa bagian bidang pada suatu bodi. Hubungan konstitutif diformulasikan pada setiap bidang, hingga diperoleh aksi tegangan pada bidang tersebut. Bazant dan Ozbolt [6] menunjukkan bahwa model *microplane* dapat diterapkan pada bahan getas baik pembebanan monotonik maupun siklik.



Gambar 2. (a) Model *elastoplastic hardening damage*, (b) Model *plastic softening-damage*,
(c) *Plastic tension softening damage*

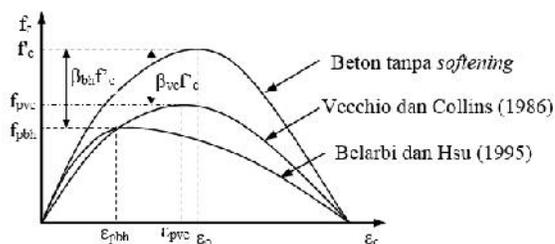


Gambar 3. Model Microplane
Sumber : Bažant dan Caner, 2005

2.2. Pemodelan beton

2.2.1. Pemodelan beton tekan

Hasil uji tekan silinder (uniaksial, biaksial, triaksial) atau tekan kolom menunjukkan bahwa setelah beban puncak, tegangan menurun walaupun regangannya meningkat. *Compression softening* adalah istilah untuk menggambarkan perilaku bahan dimana kurva tegangan-regangan mengalami penurunan atau kemiringan kurva tegangan-regangan menjadi negatif. Sejumlah riset menunjukkan bahwa kekangan dapat meningkatkan kuat tekan (faktor β pada Gambar 4) dan daktilitas. Uji panel biaksial [7], [8] menunjukkan adanya pelemahan kekuatan dan daktilitas (*compression softening*) terhadap kuat tekan uniaksial (Gambar 4).



Gambar 4. Model *compression softening*

2.2.2. Pemodelan beton tarik

Ketika beton terbebani tarik melampaui kuat tariknya akan mengalami perubahan formasi retak, dari retak mikro mejadi retak terbuka. Kestabilan retak dan perubahan kekakuan beton dipengaruhi oleh besaran energi dalam yang terdisipasi. Tiga istilah yang sering digunakan untuk mensimulasi

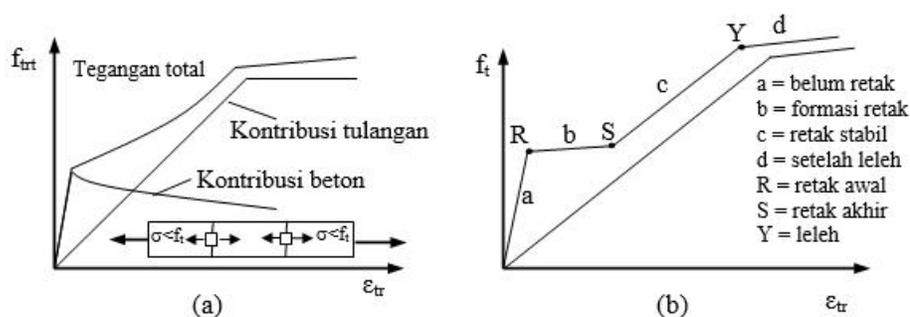
dan memodelkan formasi retak akibat beban tarik yakni; 1) *tension softening*, 2) *tension stiffening*, dan 3) *tension splitting*. *Tension softening* dan *tension stiffening* adalah dua istilah untuk menggambarkan fenomena formasi retak tegak lurus tulangan tarik atau tulangan memanjang. Pemodelan dengan *tension softening* lebih sesuai untuk elemen beton tanpa tulangan atau bertulangan kurang [5], [9]. Fib bulletin 45 [5] menyarankan bahwa model *tension softening* digunakan pada elemen skala kecil-menengah, sedangkan *tension stiffening* digunakan untuk elemen skala menengah-besar. *Tension splitting* adalah istilah untuk menggambarkan formasi retak sejajar tulangan memanjang akibat deformasi tulangan.

Pemodelan *tension softening* untuk formasi retak terbuka didefinisikan dengan energi retak (G_f) atau dalam bentuk hubungan tegangan-regangan atau hubungan tegangan-deformasi. Berdasarkan mekanisme disipasi energi, ada dua pendekatan nonlinear mekanika retak untuk bahan getas seperti beton yakni pendekatan retak hayal (*fictitious crack*) dan pendekatan retak elastis ekuivalen atau retak elastis efektif (*equivalent-elastic crack* atau *effective-elastic crack*). Pemodelan retak hayal atau kombinasi dengan model berkas retak sesuai untuk memodelkan rambatan retak dalam beton, sedangkan model tegangan regangan cocok untuk kasus-kasus khusus [5].

Perilaku *tension stiffening* diilustrasikan dengan Gambar 5(a) dan (b). Gambar 5(a) menunjukkan tegangan total yang merupakan kontribusi tulangan dan beton [10], [11]. Gambar 5(b) menunjukkan tahapan transfer beban dimana bagian b dan c adalah bagian transfer beban melalui mekanisme *tension stiffening*, bagian d adalah tarik didalam beton yang diberikan oleh tegangan lekat antara beton dan tulangan [10].

Beberapa model yang mensimulasikan beton bertulang kondisi tarik (*tension stiffening*) diusulkan untuk memprediksi retak dan deformasi elemen. Umumnya model-model tersebut dapat dikelompokkan berdasarkan tiga pendekatan yakni;

- Semi empiris: model yang dikembangkan berbasis data-data hasil analisis. Pendekatan ini banyak diadopsi pada code-code perencanaan.



Gambar 5. (a) Pengaruh *tension stiffening*, (b) Tahapan beton tarik

- Transfer tegangan: didasarkan pada tegangan lekat-slip antara beton dan tulangan. Tegangan antara beton, tulangan dan antara retak dihitung langsung dengan menggunakan keseimbangan statik. Pendekatan transfer tegangan dapat memodelkan spasi retak, lebar retak dan deformasi. Akan tetapi akurasi hasil numerik tergantung asumsi hubungan tegangan lekat-slip.
- Tegangan-regangan rata-rata; didasarkan pada retak makro smear. Umumnya pendekatan ini tidak tergantung dengan spasi retak, arah dan rasio tulangan.

Tension splitting adalah perilaku dilatasi pasca retak yang anomali pada panel-panel dengan tulangan transversal kurang yang dibenani uniaksial tarik atau kombinasi tarik dan geser [12]. Berbeda dengan efek Poisson, dilatasi beton pada arah transversal terhadap tarik, menyebabkan regangan tekan utama menjadi tarik segera setelah retak terjadi. Dengan demikian dilatasi dapat memberikan pengaruh signifikan terhadap respon beban-deformasi pada beton terkekang.

2.3. Pemodelan retak

Beton adalah bahan getas, dan ketika terbebani melampaui kuat tarik ultimitnya maka proses retak akan terjadi. Untuk meramalkan perilaku atau fenomena retak dan memprediksi redistribusi tegangan-regangan internal maka diperlukan pemodelan retak. Retak dapat diklasifikasikan dalam tiga model utama yakni: 1) model retak diskrit (*Discrete crack models*), 2) model retak merata (*Smearred crack models*), dan 3) model *meshless* atau *meshfree*.

Ide dasar model retak diskrit adalah pemisahan titik nodal pada bagian yang mengalami retak akibat *displacement* (Gambar 6(a)). Pemutusan titik nodal mengharuskan pendefinisian

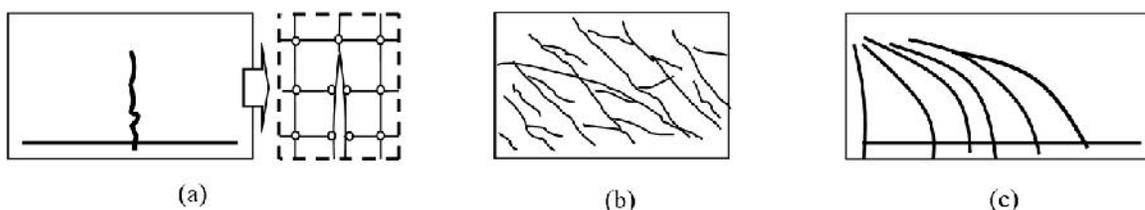
ulang titik nodal baru. Perubahan dan penambahan jumlah nodal akan mempengaruhi luas *bandwidth* dalam matriks kekakuan struktur, sehingga proses analisisnya akan menjadi lebih lama dan lebih sulit. Model ini adalah model pertama yang diaplikasikan dalam elemen hingga, akan tetapi metode menjadi kurang populer dibanding model pendekatan *smearred crack*.

Model retak *smear* mulai dikenalkan pada awal tahun 1970an. Dalam pemodelan ini beton retak dianggap tetap sebagai kontinum, garis-garis retak sejajar dengan jumlah yang tak terbatas membelah pada penampang retak elemen beton (Gambar 6(b)). Celah atau belahan-belahan yang sejajar diasumsikan terbentuk pada bidang yang tegak lurus terhadap arah tegangan utama. Setelah retak pertama terjadi, beton dianggap sebagai material orthotropis atau isotropis transversal dengan satu sumbu utama bahan searah dengan arah retak.

Metode *meshless* atau *meshfree* didasarkan pada diskritisasi media dan partikel. Metode ini dapat diterapkan untuk analisis retak dan dapat menelusur alur keruntuhan karena dapat memodelkan deformasi yang besar. Perkembangan kerusakan dan keruntuhan diprediksi dengan menggunakan riwayat regangan setiap partikel. Retak dapat berubah arah dan pertumbuhan atau perkembangan retak direpresentasikan secara diskritisasi dengan mengaktifasi permukaan retak setiap partikel. Model ini dikembangkan oleh Camacho dan Ortiz [13].

2.4. Pemodelan tulangan

Pemodelan tulangan dalam elemen hingga meliputi pemodelan tegangan-regangan, pemodelan elemen dan pemodelan interaksi atau kombinasi dengan beton (hubungan konstitutif tulangan).



Gambar 6. (a) Model retak *diskrit*, (b) Model *smear*, (c) Model *meshless*

2.4.1. Model kurva tegangan regangan

Kurva tegangan-regangan tarik monotonik dapat dimodelkan sebagai elastis, elastis plastis bilinear, elastis plastis hardening multilinier maupun elastis plastis-hardening.

2.4.2. Model elemen tulangan

Tulangan umumnya dimodelkan sebagai elemen truss atau batang 2D maupun 3D. Elemen truss hanya memiliki kekakuan aksial saja, dapat memiliki dua atau lebih titik nodal dan masing-masing nodal memiliki dua derajat kebebasan. Elemen truss baik dalam 2D maupun 3D dapat memodelkan tulangan lurus, radial (lengkung) maupun *axi-symmetric*.

2.4.3. Model hubungan konstitutif elemen

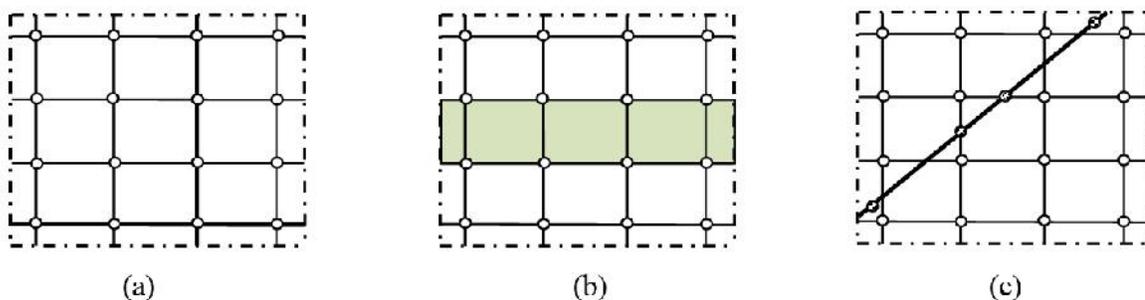
Pemodelan interaksi nodal antara beton dan tulangan atau hubungan konstitutif beton dan tulangan dilakukan dengan tiga model pendekatan yakni; 1) model *diskrit*, 2) model *smear* dan 3) model *embedded*.

Pada model *diskrit* tulangan dimodelkan sebagai batang atau elemen balok yang menghubungkan titik-titik nodal mesh beton. Dengan demikian mesh beton dan tulangan berbagi titik nodal sebagaimana ditunjukkan dengan Gambar 7(a). Kekurangan model ini adalah mesh

elemen beton tergantung lokasi tulangan, sehingga jika detail tulangan cukup kompleks akan menyulitkan geometri mesh elemen beton.

Model *smear* mulai dikenalkan pada pertengahan tahun 1970an. Pada model ini tulangan diasumsikan tersebar merata dalam elemen beton (Gambar 7(b)). Sifat-sifat material dalam elemen beton dibentuk dari sifat-sifat beton dan tulangan menggunakan teori komposit. Model ini sesuai untuk skala besar dimana detail penulangan tidak terlalu mempengaruhi respon struktur secara keseluruhan.

Model *embedded* (Gambar 7(c)) dikenalkan pertengahan tahun 1970an. Pada model ini mesh elemen beton tidak tergantung pada lokasi tulangan. Kekakuan elemen tulangan dievaluasi secara terpisah dari elemen beton tetapi perpindahan tulangan tetap terjaga kesesuaiannya/kompetibel dengan elemen beton disekitarnya. Jika tulangan cukup kompleks, model *embedded* bisa mengutungkan akan tetapi tambahan nodal berimplikasi pada peningkatan derajat kebebasan elemen, sehingga akan menambah waktu perhitungan. Sculac and Jelenik [14] mengembangkan model *embedded discontinuity layered beam finite element* yang dapat menentukan letak, kedalaman dan lebar dua buah retak terbuka.



Gambar 7. Pemodelan tulangan; (a) *Diskrit*, (b) *Smear*, (c) *Embedded*

2.5. Pemodelan lekat (*bond*)

Perilaku tarik beton bertulangan dipengaruhi oleh transfer tegangan tarik tulangan terhadap beton. Transfer tegangan ini adalah wujud dari aksi lekat atau lekat gelincir antara tulangan dan beton disekitarnya. Dalam elemen hingga aksi lekat-gelincir dimodelkan dengan 3 cara yakni: 1) pemodelan dengan lekat sempurna, 2) pemodelan dengan elemen khusus yakni elemen *link* dan elemen zone atau kontak 3) pemodelan dengan menggunakan kurva tegangan-regangan. Pemodelan lekat sempurna dan elemen khusus dapat dimodelkan dengan 1D, 2D atau 3D. Pemodelan dengan 3D dapat merepresentasikan perilaku kompleksitas dalam mekanika bond.

2.5.1. Pemodelan lekat sempurna (*perfect bond*)

Elemen lekat sempurna adalah pemodelan dimana tidak ada pergerakan relatif antara tulangan dan beton. Elemen kompetibel menempati koordinat yang sama baik sebelum mengalami perpindahan maupun setelah perpindahan.

2.5.2. Pemodelan dengan elemen khusus (elemen *link* dan elemen kontak)

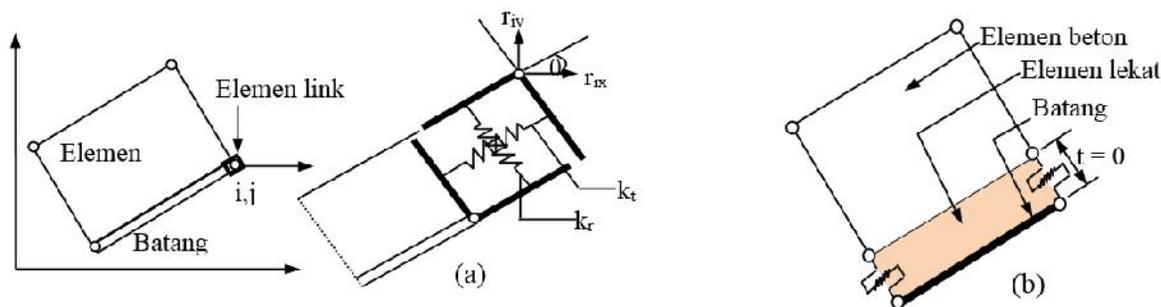
Elemen link mempunyai dua titik nodal dan tidak berdimensi. Sebelum terjadi slip pasangan nodal mempunyai koordinat yang sama. Secara konsep terdiri dari pegas orthogonal yang menghubungkan dan mentransfer gaya geser dan gaya normal antara noda tulangan dan nodal beton

disekitarnya. Satu pegas berdeformasi tangensial untuk elemen tulangan diskrit yang merepresentasikan gelincir lekat dan tegangan-tegangan lekat. Satu pegas lainnya berdeformasi radial juga untuk elemen tulangan diskrit yang merepresentasikan tegangan dan perpindahan radial. Model dipresentasikan oleh Ngo dan Scoderlis [1] dan dikembangkan oleh banyak peneliti lainnya.

Dalam elemen zona atau elemen kontak, perilaku permukaan kontak antara tulangan dan beton dan perilaku beton disekitar tulangan dinyatakan dengan model konstitutif (hubungan tegangan-regangan) material yang mempertimbangkan sifat-sifat khusus dari zona lekat. Elemen kontak dapat dimodelkan menerus atau diskrit dimana tulangan mempunyai dimensi searah panjangnya. Elemen kontak menerus sepanjang tulangan diskrit, jika perpindahan medan (*displacement field*) linier maupun berorde tinggi menggunakan skema diskritisasi. Model ini dikembangkan oleh Wong dan Vecchio [15], Ozbolt dkk. [16].

2.5.3. Model tegangan lekat-gelincir

Hubungan tegangan lekat-gelincir merefleksikan kuat lekat yang dipengaruhi nilai dan kondisi slip antara tulangan dan beton disekitarnya. Model-hubungan lekat-gelincir dijumpai pada CEB-FIB Model Code [10], Harajli [17] dan yang lainnya.



Gambar 8. (a) Elemen kontak (Wong dan Vecchio, 2002); (b) Elemen zone (Ozbolt dkk. 2002)

PEMODELAN PADA SOFTWARE SKALA BESAR/KOMERSIL

Pemodelan elemen berbasis elemen hingga telah mengalami perkembangan pesat dalam beberapa dekade terakhir. Terdapat puluhan software yang telah dikembangkan oleh beberapa

universitas maupun perusahaan tertentu dan yang familiar [18] antara lain; ABAQUS [9], ANSYS [19], ATENA [20], ADINA [21], DIANA [22], VecTor2 [15]. Variasi pemodelan elemen pada *software-software* tersebut dideskripsikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Variasi pemodelan elemen beberapa *software*

	ABAQUS	ANSYS	ATENA	ADINA	DIANA	VecTor2
Konstitutif beton						
<i>Nonlinear elasticity</i>					✓	✓
<i>Plasticity</i>		✓				
<i>Damage</i>			✓			
<i>Damage-plasticity</i>	✓				✓	
<i>Fracture-plasticity</i>			✓			
<i>Compression softening</i>		✓	✓	✓	✓	✓
<i>Confinement</i>						✓
<i>Tension softening</i>	✓		✓		✓	✓
<i>Tension stiffening</i>	✓	✓	✓	✓		✓
<i>Tension splitting</i>						✓
<i>Plastic offset</i>	✓		✓		✓	✓
Pemodelan retak						
<i>Smear</i>	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<i>Diskrit</i>	✓	✓			✓	
Pemodelan tulangan						
Kurva teg.-reg.	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<i>Elastic-plastis-hardening</i>	✓	✓	✓	✓	✓	✓
<i>Plastic offset</i>	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Elemen truss	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Hub. Konstitutif tulangan						
<i>Smear</i>	✓	✓	✓			✓
<i>Diskrit</i>		✓		✓	✓	✓
<i>Embedded</i>	✓	✓	✓	✓	✓	
Pemodelan lekat (<i>bond</i>)						
Lekat sempurna	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Elemen <i>link</i>	✓		✓		✓	✓
Elemen <i>bond</i> (kontak)	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Kurva teg.-reg <i>bond-slip</i>			✓			✓

KESIMPULAN

Elemen hingga nonlinear merupakan simulasi numerik yang didasarkan pada analisis keruntuhan yang mengkombinasikan model konstitutif material dan analisis berbasis elastisitas, platisitas, model *microplane*, serta kombinasi platisitas dan *damage* atau *fracture*. Elemen hingga dapat menganalisis beragam model atau bentuk elemen maupun struktur. Perkembangan pemodelan yang signifikan menjadikan elemen hingga tidak saja sebagai alat analisis akan tetapi juga dapat dimanfaatkan sebagai simulasi awal pengujian, evaluasi maupun perencanaan elemen maupun struktur.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] D. Ngo and A. C. Scordelis, "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams," *ACI J.*, vol. 64, pp. 152–163, 1967.
- [2] W.-F. Chen and A. F. Saleeb, *Constitutive Equations for Engineering Materials*. New York: Elsevier, 1994.
- [3] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, and E. Onate, "A Plastic Damage Model for Concrete," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 25, no. 3, pp. 299–326, 1989.
- [4] G. Z. Voyiadjis, Z. N. Taqieddin, and P. I. Kattan, "Anisotropic Damage-Plasticity Model for Concrete," *Int. J. Plast.*, vol. 24, no. 10, pp. 1946–1965, Oct. 2008.

- [5] J. ervenka and V. K. Papanikolaou, "Three Dimensional Combined Fracture-Plastic Material Model for Concrete," *Int. J. Plast.*, vol. 24, no. 12, pp. 2192–2220, Dec. 2008.
- [6] Z. P. Bažant and F. C. Caner, "Microplane Model M5 with Kinematic and Static Constraints for Concrete Fracture and Anelasticity. I: Theory," *J. Eng. Mech. @ASCE*, vol. 131, no. 1, pp. 31–40, Dec. 2005.
- [7] F. J. Vecchio and M. P. Collins, "Compression Response of Cracked Reinforced Concrete," *J. Struct. Eng.*, vol. 119, no. 12, pp. 3590–3610, 1993.
- [8] A. Belarbi, L.-X. Zhang, and T. T. C. Hsu, "Constitutive Laws of Reinforced Concrete Membrane Elements," *Elev. World Conf. Earthq. Eng.*, vol. Paper No. 1208, 1996.
- [9] ABAQUS, *ABAQUS Analysis User's Manual*, Version 6.7. 2007.
- [10] CEB-FIP, *Structural Concrete; Introduction - Design Process - Materials (214-252)*, Volume I. 1990.
- [11] M. D. Kotsovos, *Finite-Element Modelling of Structural Concrete: Short-Term Static and Dynamic Loading Conditions*. CRC Press, 2015.
- [12] F. J. Vecchio and A. DeRoo, "Smearred-Crack Modeling of Concrete Tension Splitting," *J. Eng. Mech.*, vol. 121, no. 6, pp. 702–708, 1995.
- [13] G. T. Camacho and M. Ortiz, "Computational Modelling of Impact Damage in Brittle Materials," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 33, no. 20–22, pp. 2899–2938, 1996.
- [14] P. Sculak and G. Jelenic, *Modelling Cracking in Reinforced Concrete Beam Using Beam Finite Elemen with Embedded Discontinuity*. CRC Press, Taylor and Francil Group, 2014.
- [15] P. S. Wong, F. J. Vecchio, and H. Trommels, *VECTOR2 and FORMWORKS USER'S MANUAL SECOND EDITION*, 2nd ed. 2013.
- [16] J. Ožbolt, S. Lettow, and I. Kožar, "Discrete Bond Element for 3D Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures," 2002.
- [17] M. H. Harajli, "Bond Stress–Slip Model for Steel Bars in Unconfined or Steel, FRC, or FRP Confined Concrete Under Cyclic Loading," *J. Struct. Eng.*, vol. 135, no. 5, pp. 509–518, Apr. 2009.
- [18] C. Project and S. Johnson, "Comparison of Nonlinear Finite Element Modeling Tools for Structural Concrete," 2006.
- [19] ANSYS, *ANSYS Structural Analysis Guide*, ANSYS Release 9.0. ANSYS, Inc., 2004.
- [20] V. ervenka and J. N. Prague, "ATENA Program Documentation Part 5 ATENA-FEMAP User's Guide written by ATENA-FEMAP User's Guide," 2005.
- [21] ADINA, *ADINA System 8.7 Release Notes*. ADINA R & D, Inc., 2011.
- [22] DIANA, "DIANA 10 Finite Element Analysis," *TNO DIANA BV*. Delft, Netherlands, 2016.