Jurnal Ilmiah " **TEKNIKA** "
ISSN: 2355-3553 **VOL. 5 NO. 1**

PERHITUNGAN TEKANAN DAN DEBIT ALIRAN AIR DALAM PIPA : APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA DENGAN MENGGUNAKAN PERSAMAAN LINIER SIMULTAN

Yeny Pusvyta*
*Dosen Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas IBA
Email : yeny.isgawa@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini merupakan penelitian awal yang mengarah kepada penyelesaian dengan metoda komputasi. Dimana kasus yang terjadi merupakan kasus yang mempunyai model matematika dengan variabel yang banyak. Pada instalasi pipa yang bercabang, debit aliran pipa diatur dengan menetapkan batasan nilai tekanan masuk dan keluar. Instalasi pipa kemudian dibagi menjadi beberapa elemen. Metode elemen hingga digunakan untuk menentukan titik-titik acuan yang akan ditinjau tekanannya, sehingga tekanan pada tiap elemen pipa dapat diketahui. Pada tiap elemen dihitung tahanannya. Perhitungan tekanan pada rangkaian pipa dilakukan dengan metode eliminasi Gauss matrik segitiga atas dan bawah. Analisa dan komparasi dari hasil perhitungan penurunan tekanan dan debit aliran menunjukkan perhitungan tekanan memenuhi hukum *Poiseuille* dan mempunyai *trend* nilai yang sama dengan perbedaan nilai tekanan terbesar di elemen 5 sebesar 73 N/m^2 atau sekitar 6,06% dan perbedaan tekanan terkecil di elemen 6 sebesar 9,73 N/m^2 atau sekitar 0,81%. Perbedaan nilai debit terbesar terdapat pada elemen 1 yaitu sebesar 13,25 m^3/s dan yang terkecil sebesar 1,27 m^3/s pada elemen pipa 2, 3, dan 4. Pada perhitungan debit masuk keluar pipa bercabang, didapat hasil bahwa tidak seluruh pipa majemuk pada instalasi tersebut memenuhi hukum kontinuitas.

Keyword : Elemen pipa, eliminasi Gauss, matrik segitiga atas dan bawah, perubahan tekanan, debit aliran.

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pemenuhan kebutuhan terhadap air dengan jangkauan yang jauh sebagian besar dilakukan dengan menggunakan sistem perpipaan, dimana pada proses aliran dari sumber air tersebut terdapat rugi-rugi yang mengakibatkan penurunan tekanan aliran. Beberapa kondisi yang mempunyai pengaruh terhadap rugi-rugi aliran fluida, seperti gesekan pada dinding pipa, belokan belokan, perbesaran maupun pengecilan dalam pipa, dan variabel lainnya sehingga tekanan dalam pipa makin berkurang. Seperti penelitian yang dilakukan oleh Nurcholis (2008), tentang perhitungan laju aliran fluida pada jaringan pipa yang menunjukkan bahwa hubungan antara kehilangan tenaga dan debit aliran, jika aliran semakin besar dengan koefisien rugi *head* tinggi, maka rugi *head* pada setiap panjang pipa semakin besar.

Perhitungan rugi-rugi aliran air dalam pipa yang bercabang dengan metode elemen hingga melibatkan penggunaan variabel yang lebih banyak tergantung dengan jumlah elemen, dimana penyelesaian dengan variabel yang sangat banyak akan lebih efisien jika dilakukan dengan metode komputasi. Pada proses ke arah penggunaan metode komputasi, diperlukan langkah-langkah awal dalam menangani kasus perhitungan yang memiliki kemungkinan untuk diselesaikan dengan metode tersebut.

Proses numerik yang dilakukan pada perhitungan tekanan dan debit air dalam pipa, melibatkan pembagian elemen yang jumlahnya sebanding dengan banyaknya variabel dalam persamaan. Penyelesaian proses numerik untuk persamaan variabel banyak untuk kasus aliran dalam pipa yang merupakan persamaan linier, membutuhkan perhitungan manual yang dilakukan sebagai langkah awal untuk mendapatkan nilai pembanding untuk proses yang lebih lanjut. Mengingat bahwa, proses manual yang biasa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, tidak bisa begitu saja diterapkan dalam pemrograman. Diperlukan beberapa perlakuan yang berbeda, yang pada prinsipnya bertujuan untuk memperoleh bentuk matrik yang paling optimal (Krisnawati, 2009). Maka dilakukan perhitungan dengan dua perlakuan yang berbeda untuk melihat kesamaan ataupun perbedaan terhadap nilai tekanan dan debit yang dihasilkan.

1.2. Tujuan Penelitian

Menerapkan teori-teori dalam metode elemen hingga untuk perhitungan tekanan aliran fluida tak mampu mampat dalam pipa tertutup, dan mengkomparasi nilai tekanan dan debit dengan perhitungan eliminasi Gauss segitiga atas dan bawah.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Metode Elemen Hingga

Metode Elemen hingga adalah metode numerik untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun parsial. Prinsip metode elemen hingga adalah membagi domain permasalahan baik itu domain ruang (*spatial domain*) atau domain waktu (*time domain*), menjadi sub domain atau elemen yang lebih kecil. Dengan menghitung solusi ada elemen elemen dan selanjutnya menggabungkan keseluruhan solusi elemental, solusi total dari permasalahan yang diperoleh. Dalam menghitung solusi per-elemen tentunya solusi elemen harus memenuhi beberapa ketentuan, seperti kontinuitas pada titik titik nodal dan antarmuka (*interface*) elemen (Kosasih, 2012).

Persamaan Linier Simultan

Persamaan linier simultan adalah suatu bentuk persamaan-persamaan yang secara bersama sama menyajikan banyak variabel bebas. Bentuk persamaan linier simultan dengan *m* persamaan dan *n* variabel bebas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Persamaan tersebut ditulis dalam bentuk matrik, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

dimana :

a_{ij} = merupakan koefisien persamaan simultan dengan i menunjukkan baris, dan j menunjukkan kolom

x = variabel bebas pada persamaan simultan

Persamaan linear simultan dapat diselesaikan dengan beberapa metode, salah satunya yaitu dengan metode eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauss, beberapa persamaan n x n dan dengan 1 x n variabel bebas dikumpulkan dalam sebuah matrik yang dinamakan *augmented matrik*. Beberapa variabel dalam *Augmented matrik* kemudian dilakukan eliminasi, dengan mengambil pivot baris pertama dan berlanjut hingga baris ke m-1. Variabel di baris selanjutnya dikurangkan dengan baris pivot dikali konstanta dilakukan supaya matrik tersebut berbentuk segitiga atas, atau mengambil pivot di baris terakhir untuk menjadi matrik segitiga bawah dengan menggunakan operasi basis elementer (OBE). Contoh *augmented matrik* yang diubah menjadi matrik segitiga atas :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{mn} & d_n \end{array}\right]$$

Nilai dari masing-masing variabel dicari dengan melakukan substitusi balik, dengan mencari harga x_n , x_{n-1} hingga x_1.

$$a_{nn}x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n/a_{nn}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-2} \rightarrow x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}$$

Dan seterusnya, hingga didapat seluruh nilai variabel x.

Aliran tak mampu mampat dalam pipa

Aliran fluida internal tak mampu mampat adalah aliran di dalam suatu laluan yang penampang nya berupa kurva tertutup dan masa jenis fluida sepanjang aliran adalah tetap.

Aliran tunak berkembang penuh pada diameter konstan digerakan oleh gravitasi dan/atau gaya tekanan. Pada aliran pipa horizontal, gravitasi tidak berpengaruh untuk variasi tekanan hidrostatik melalui pipa. Perbedaan tekanan $\Delta p = p_1 - p_2$ antara bagian satu dengan yang lain yang membuat fluida mengalir melalui pipa. Perhitungan perbedaan tekanan dihitung dengan rumus 2.1.

$$\Delta p = \rho\, f\, \frac{L}{D}\, \frac{\bar{v}^2}{2} \qquad (2.1)$$

$$\mu = \frac{4\, \rho\, Q}{\pi\, D\, Re} \qquad (2.2)$$

dimana;

Δp = *pressure drop* (N/m^2)
ρ = masa jenis fluida (kg/m^3)
L = panjang pipa (m)
$\bar{v}$ = kecepatan rata-rata (m/s)

μ = viskositas dinamik (N.s/m^2)
f = faktor gesekan
Re = Bilangan Reynolds
Q = debit aliran (m^3/s)

Untuk aliran tunak, berkembang penuh;

- Aliran laminar (Re < 2300)

$$f = \frac{64}{Re} \tag{2.3}$$

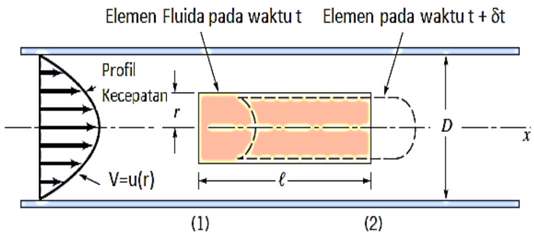
$$\frac{l_e}{D} = 0{,}06\ Re\ ;\ \frac{l_e}{D} = \text{panjang jalan masuk} \tag{2.4}$$

Untuk Aliran Laminer, berkembang penuh pada pipa horizontal, dengan mensubtusi rumus (2,3), rumus luas penampang lingkaran ke rumus (2.1) dan mengkonversi dengan rumus (2.2) didapat rumus penurunan tekanan atau dikenal dengan hukum *Poiseuille*:

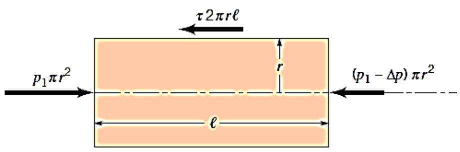
$$\Delta p = \frac{128\,\mu\,L}{\pi\,D^4}\,Q \tag{2.5}$$

- Aliran turbulen (Re > 4000)

$$\frac{l_e}{D} = 4{,}4\ (Re)^{1/6} \tag{2.6}$$



Gambar 2.1. Pergerakan Elemen Fluida Silindris dalam Pipa



Gambar 2.2. Diagram Benda Bebas Elemen Fluida

Persamaan Bernoulli untuk fluida aliran tunak tak mampu mampat, jika tidak terjadi rugi tekanan akibat gesekan :

$$\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}\,(v_2{}^2 - v_1{}^2) + g(z_2 - z_1) = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1{}^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2{}^2 + gz_2 \tag{2.8}$$

- ***Mayor head loss*** adalah rugi pada daerah pipa lurus. Keseimbangan energi untuk aliran tunak berkembang penuh;

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + gz_2\right) = \frac{L}{D}\frac{\bar{v}^2}{2} \tag{2.9}$$

$$h_L = \frac{L}{D}\frac{\bar{v}^2}{2} \tag{2.10}$$

- ***Minor head loss*** : Rugi pada daerah pipa yang diakibatkan perubahan arah atau geometri sepanjang saluran alir, terjadi akibat belokan, *elbow, tee,* dan sebagainya.

$$h_M = K\frac{\bar{v}^2}{2} \tag{2.11}$$

$$h_M = \frac{L_e}{D}\frac{\bar{v}^2}{2} \tag{2.12}$$

dimana :

D, f, dan $\bar{v}$ mengarah pada pipa yang berdekatan
K = koefisien *head loss*
L_e = panjang ekivalen

Total Head Loss :

$$h_T = \sum h_L + \sum h_M \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1{}^2 + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2{}^2 + gz_2\right) = h_T \tag{2.14}$$

$\alpha =$ koefisien energy kinetik ($\alpha = 1$ untuk profil seragam, $\alpha = 2$ untuk profil parabolik)

Pada aliran konstan fluida dalam pipa yang tidak mampu mampat dan masa jenisnya tetap, berlaku hukum kontinuitas yaitu perkalian antara luas penampang dan kecepatan fluida di setiap titik sepanjang tabung adalah konstan pada persamaan (2.15) dan (2.16).

$$Q_1 = Q_2 \tag{2.15}$$

$$\overline{v_1}\,.\,A_1 = \overline{v_2}\,.\,A_2 \tag{2.16}$$

Pada sistem pipa majemuk yang terdiri dari pipa pipa yang tersusun bercabang (*loop),* maka jumlah seluruh laju aliran pada percabangannya merupakan besar laju aliran di pipa utama. Persamaan (2.17) untuk pipa majemuk yang mempunyai dua cabang :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \tag{2.17}$$

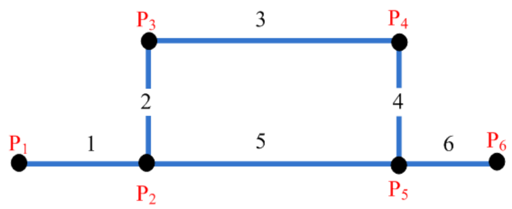
3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan untuk penelitian ini merupakan kajian literatur dan studi komparasi dari perhitungan teoritis perhitungan tekanan fluida cair dalam sambungan pipa, dimana dalam perhitungan tersebut menggunakan teori dalam metode elemen hingga, sistem persamaan linier simultan yaitu eliminasi Gauss segitiga atas dan bawah.

Metodologi penelitian :

1. Menetapkan model fisik rangkaian pipa untuk aliran fluida
2. Menetapkan batasan-batasan penelitian dan asumsi
3. Membagi rangkaian pipa menjadi beberapa elemen
4. Membuat model matematika untuk satu elemen
5. Menetapkan kondisi batas dan nilai nilai awal
6. Membuat *augmented matrik*
7. Melakukan penyelesaian dengan metode eliminasi Gauss segitiga atas dan bawah
8. Mendapatkan nilai tekanan di tiap titik
9. Mendapatkan nilai debit
10. Membandingkan dan menganalisa nilai tekanan
11. Membandingkan dan menganalisa nilai debit

Adapun model fisik rangkaian pipa yang akan dibahas terdapat pada gambar berikut:



Gambar 3.1. Model Fisik Pipa dengan Pembagian Elemen dan Nodal Tekanan

Batasan – batasan dalam penelitian ini adalah :

- Sambungan pipa berada pada level ketinggian yang sama
- Fluida di dalam pipa adalah yaitu air.
- Aliran air dalam pipa merupakan aliran laminer
- Aliran air dalam pipa adalah aliran berkembang penuh
- Perhitungan *head loss* minor diabaikan
- Rangkaian pipa dibagi menjadi 6 elemen
- Pengujian perhitungan mengambil nilai : $L_1 = L_6 = 3$ meter, $L_2 = L_4 = 10$ meter, $L_3 = L_5 = 16$ meter, diameter pipa 40 mm, tekanan masuk 2000 N/m^2 dan tekanan keluar = 1200 N/m^2, viskositas dinamik air diambil untuk suhu 20^{o}C = 0,001 Ns/m^2.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model matematika untuk kasus aliran fluida laminer dan tak mampu mampat dalam pipa didapat model matematika dari persamaan (2.5) untuk debit aliran dan *pressure drop* sebgai berikut :

$$\frac{\pi\, D^4}{128\, \mu\, L}\, \Delta p = Q$$

ISSN: 2355-3553 **VOL. 5 NO. 1**

Tahanan pada elemen pipa :

$$[R]^e \begin{bmatrix} \frac{\pi D^4}{128\mu L} & -\frac{\pi D^4}{128\mu L} \\ -\frac{\pi D^4}{128\mu L} & \frac{\pi D^4}{128\mu L} \end{bmatrix}$$

dimana :

R = Tahanan pipa $(m^5/N.s)$

Model matematika debit aliran pada satu elemen elemen pipa:

$$\begin{bmatrix} Q_{i,i+1} \\ -Q_{i+1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi D^4}{128\mu L} & -\frac{\pi D^4}{128\mu L} \\ -\frac{\pi D^4}{128\mu L} & \frac{\pi D^4}{128\mu L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_{\,i+1} \end{bmatrix}$$

Augmented matrik untuk enam elemen pipa dibuat dengan menjumlahkan tahanan pada percabangan pipa :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
\frac{\pi D_1{}^4}{128\mu L_1} & -\frac{\pi D_1{}^4}{128\mu L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 \\
-\frac{\pi D_1{}^4}{128\mu L_1} & \frac{\pi}{128\mu}\left(\frac{D_1{}^4}{L_1}+\frac{D_2{}^4}{L_2}+\frac{D_5{}^4}{L_5}\right) & -\frac{\pi D_2{}^4}{128\mu L_2} & 0 & -\frac{\pi D_5{}^4}{128\mu L_5} & 0 & B_2 \\
0 & -\frac{\pi D_2{}^4}{128\mu L_2} & \frac{\pi}{128\mu}\left(\frac{D_2{}^4}{L_2}+\frac{D_3{}^4}{L_3}\right) & -\frac{\pi D_3{}^4}{128\mu L_3} & 0 & 0 & B_3 \\
0 & 0 & -\frac{\pi D_3{}^4}{128\mu L_3} & \frac{\pi}{128\mu}\left(\frac{D_3{}^4}{L_3}-\frac{D_4{}^4}{L_4}\right) & -\frac{\pi D_4{}^4}{128\mu L_4} & 0 & B_4 \\
0 & -\frac{\pi D_5{}^4}{128\mu L_5} & 0 & -\frac{\pi D_4{}^4}{128\mu L_4} & \frac{\pi}{128\mu}\left(\frac{D_4{}^4}{L_4}-\frac{D_5{}^4}{L_5}+\frac{D_6{}^4}{L_6}\right) & -\frac{\pi D_6{}^4}{128\mu L_6} & B_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi D_6{}^4}{128\mu L_6} & \frac{\pi D_6{}^4}{128\mu L_6} & B_6
\end{array}\right]$$

Untuk mendapatkan nilai tekanan di tiap elemen pipa, masukkan nilai batas tekanan masuk dan tekanan keluar, maka nilai $-\frac{\pi D_1{}^4}{128\mu L_1}$ pada *augmented matrik* baris pertama dan $-\frac{\pi D_6{}^4}{128\mu L_6}$ pada baris keenam menjadi nol. Masukkan nilai diameter, viskositas dinamik dan nilai panjang pipa :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\
-209{,}33.10^{-7} & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}3.10^{-7} & 0 & 0 \\
0 & -62{,}8.10^{-7} & 102{,}05.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -39{,}25.10^{-7} & 102{,}1.10^{-7} & -62{,}8.10^{-7} & 0 & 0 \\
0 & -39{,}25.10^{-7} & 0 & -62{,}8.10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & -209{,}33.10^{-7} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}\right]$$

A. Matrik Segitiga Atas

Pivot baris ke-1

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\
0 & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}80.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0419 \\
0 & -62{,}8.\ 10^{-7} & 102{,}05.\ 10^{-7} & 39{,}25.\ 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 102{,}05.\ 10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & 0 & 0 \\
0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 0 & -62{,}8.\ 10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & -209{,}33.\ 10^{-7} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}\right]$$

Pivot baris ke-2

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\
0 & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}80.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0419 \\
0 & 0 & 89{,}38.\ 10^{-7} & -39{,}25.\ 10^{-7} & -7{,}92.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0084 \\
0 & 0 & -39{,}25.10^{-7} & 102{,}05.\ 10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -7{,}92.10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & 306{,}44.\ 10^{-7} & -209{,}33.\ 10^{-7} & 0{,}0053 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}\right]$$

Pivot baris ke-3

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\
0 & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}80.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0419 \\
0 & 0 & 89{,}38.\ 10^{-7} & -39{,}25.\ 10^{-7} & -7{,}92.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0084 \\
0 & 0 & 0 & 84{,}81.\ 10^{-7} & -66{,}28.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0037 \\
0 & 0 & 0 & -62{,}8.\ 10^{-7} & 300{,}87.\ 10^{-7} & -209{,}33.\ 10^{-7} & 0{,}0053 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}\right]$$

Pivot baris ke-4

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\
0 & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}80.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0419 \\
0 & 0 & 89{,}38.\ 10^{-7} & -39{,}25.\ 10^{-7} & -7{,}92.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0084 \\
0 & 0 & 0 & 84{,}81.\ 10^{-7} & -66{,}28.\ 10^{-7} & 0 & 0{,}0037 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 251{,}80.\ 10^{-7} & -209{,}33.\ 10^{-7} & 0{,}0080 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200
\end{array}\right]$$

Matrik segitiga atas setelah dilakukan eliminasi Gauss menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}80.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}25.\ 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 89{,}38.\ 10^{-7} & -39{,}25.\ 10^{-7} & -7{,}92.\ 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 84{,}81.\ 10^{-7} & -66{,}28.\ 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 251{,}80.\ 10^{-7} & -209{,}33.\ 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0{,}0419 \\ 0{,}0084 \\ 0{,}0037 \\ 0{,}0080 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik didapat nilai tekanan p_5, p_4, p_3 dan p_2 secara berurut pada tabel untuk matrik (A).

B. Matrik Segitiga Bawah

Pivot di baris 6

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ -209{,}33.10^{-7} & 311{,}38.10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & 0 & -39{,}3.10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & -62{,}8.10^{-7} & 102{,}05.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39{,}25.10^{-7} & 102{,}1.10^{-7} & -62{,}8.10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & -39{,}25.10^{-7} & 0 & -62{,}8.10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & 0 & 0{,}0251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right]$$

Pivot di baris 5

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ -209{,}33.10^{-7} & 306{,}44.\ 10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & -7{,}92.10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -62{,}8.10^{-7} & 102{,}05.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}92.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 89{,}38.10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -39{,}25.10^{-7} & 0 & -62{,}8.10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & 0 & 0{,}0251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right]$$

Pivot di baris ke 4

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ -209{,}33.10^{-7} & 305{,}7.10^{-7} & -62{,}8.\ 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0{,}0036 \\ 0 & -66{,}3.10^{-7} & 84{,}8.10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0{,}0022 \\ 0 & -7{,}92.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 89{,}38.10^{-7} & 0 & 0 & 0{,}0051 \\ 0 & -39{,}25.10^{-7} & 0 & -62{,}8.10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & 0 & 0{,}0251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right]$$

Pivot di baris ke 3

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ -209{,}33.10^{-7} & 254{,}0.10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0036 \\ 0 & -66{,}3.10^{-7} & 84{,}8.10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0{,}0022 \\ 0 & -7{,}92.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 89{,}38.10^{-7} & 0 & 0 & 0{,}0051 \\ 0 & -39{,}25.10^{-7} & 0 & -62{,}8.10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & 0 & 0{,}0251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right]$$

Matrik segitiga bawah setelah dilakukan eliminasi Gauss :

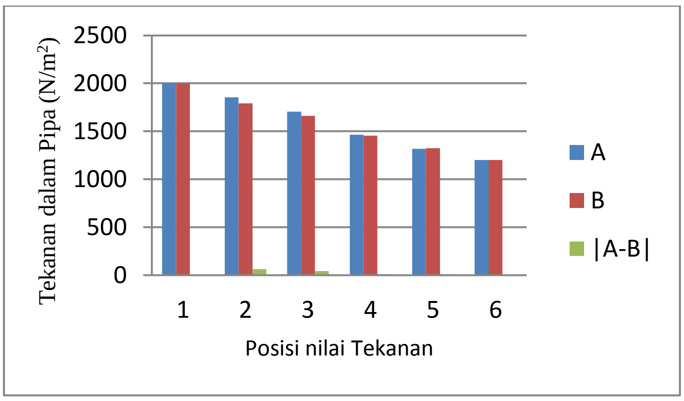
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -209{,}33.10^{-7} & 254{,}0.10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -66{,}3.10^{-7} & 84{,}8.10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}92.10^{-7} & -39{,}25.10^{-7} & 89{,}38.10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & -39{,}25.10^{-7} & 0 & -62{,}8.10^{-7} & 311{,}4.10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0{,}0036 \\ 0{,}0022 \\ 0{,}0051 \\ 0{,}0251 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan substitusi, didapatkan secara berurut nilai p_2, p_3, p_4, dan p_5, pada tabel untuk matrik B.

Tabel 4.1. Nilai Tekanan pada Perhitungan Eliminasi Gauss Matrik Segitiga Atas dan Bawah

	Tekanan (N/m^2)					
Matrik	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
A	2000	1854,2774	1704,8182	1465,6836	1316,2245	1200
B	2000	1791,0043	1661,8230	1455,1330	1325,9517	1200
|A-B|	0	63,2731	42,9952	10,5506	9,7272	0

Nilai yang dicari dengan menggunakan eliminasi Gauss segitiga atas memiliki nilai tekanan p_2, p_3, p_4 yang lebih tinggi dari nilai pada eliminasi Gauss segitiga bawah, sedangkan nilai p_5 lebih rendah. Selisih nilai tekanan tertinggi yaitu selisih tekanan di titik p_2 matrik A dan B, kemudian menurun secara berurut selisih tekanan di titik p_3, p_4, dan p_5.

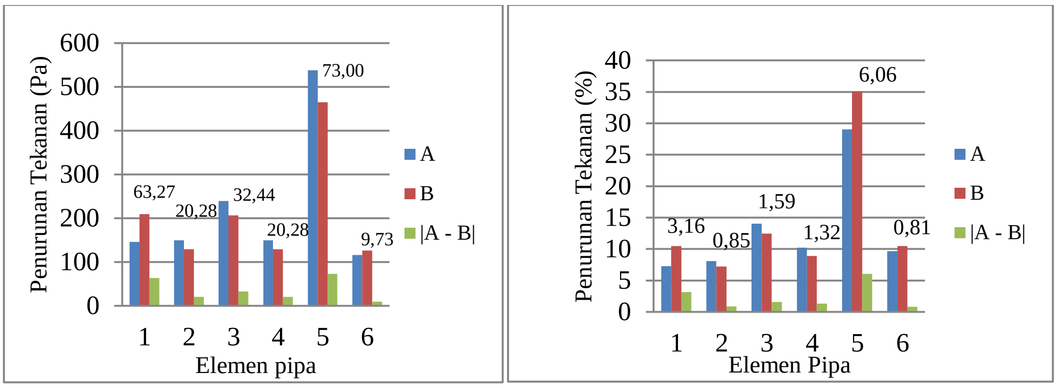


Gambar 4.1. Nilai Tekanan dan Debit Aliran pada Tiap Elemen Pipa untuk Matrik Segitiga Atas (A) dan Bawah (B)

Tabel 4.2. Penurunan Tekanan dan Debit Aliran pada Tiap Elemen Pipa untuk Matrik Segitiga Atas (A) dan Bawah (B)

Elemen	Panjang Pipa (m)	Penurunan tekanan (Δp)							Tahanan pipa	Debit Aliran (m^3/s)		
		Posisi	A		B		|A - B|					
			(N/m^2)	%	(N/m^2)	%	(N/m^2)	%	$*10^{-6}$	A	B	|A - B|
1	3	P_1-P_2	145,72	7,29	209,00	10,45	63,27	3,16	20,93	30,50	43,75	13,25
2	10	P_2-P_3	149,46	8,06	129,18	7,21	20,28	0,85	6,28	9,39	8,11	1,27
3	16	P_3-P_4	239,13	14,03	206,69	12,44	32,44	1,59	3,93	9,39	8,11	1,27
4	10	P_4-P_5	149,46	10,20	129,18	8,88	20,28	1,32	6,28	9,39	8,11	1,27
5	16	P_2-P_5	538,05	29,02	465,05	35,07	73,00	6,06	3,93	21,12	18,25	2,87
6	3	P_5-P_6	116,22	9,69	125,95	10,50	9,73	0,81	20,93	24,33	26,37	2,04

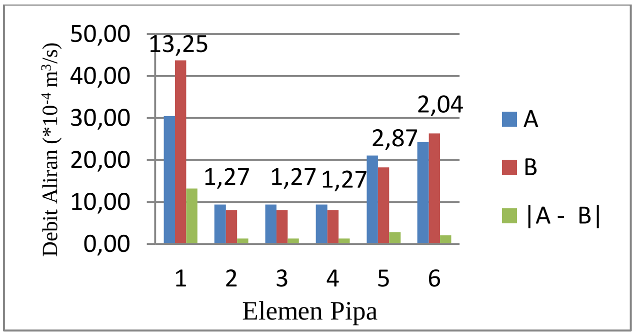
Perbandingan nilai penurunan tekanan untuk eliminasi Gauss matrik segitiga atas dan bawah : pada pengerjaan dengan matrik segitiga atas terlihat angka penurunan tekanan yang lebih tinggi untuk elemen 2, 3, 4, dan 5 dibandingkan pengerjaan matrik segitiga bawah yang nilainya lebih tinggi untuk elemen 1 dan 6. Selisih nilai penurunan tekanan terbesar berdasarkan urutan terdapat pada elemen 5, 1, 3, tekanan pada elemen 2 dan 4 yang memiliki nilai sama, dan selisih terkecil terdapat pada perhitungan penurunan tekanan di elemen 6. Kedua metode memiliki nilai penurunan tekanan yang tertinggi berurut pada elemen 5, 3, elemen 2 dan 4 yang memiliki nilai yang sama, sedangkan nilai terkecil terdapat pada elemen 6.



Gambar 4.2. Grafik Penurunan Tekanan pada Elemen Pipa

Nilai penurunan tekanan yang besar terdapat pada elemen 5 dan elemen 3, yang merupakan pipa yang paling panjang. Ini sesuai dengan hukum *Poiseuille* dimana penurunan tekanan sebanding dengan pertambahan panjang.

Pada matrik eliminasi Gauss segitiga atas, penurunan tekanan terbesar terjadi pada elemen 5 yaitu sebesar 538,0528 N/m^2 sedangkan elemen cabang pipa yang yang lain yaitu elemen pipa 2,3,dan 4 yang terhubung, jumlah penurunan tekanan ketiga cabang tersebut nilainya sama dengan penurunan tekanan pada elemen pipa 5 yaitu 538,05 N/m^2. Pada matrik eliminasi Gauss segitiga bawah, terjadi kecenderungan yang sama namun nilainya berbeda. Penurunan tekanan terbesar juga terjadi pada elemen 5 yaitu sebesar 465,05 N/m^2 sedangkan elemen cabang pipa yang yang lain yaitu elemen pipa 2,3,dan 4 yang terhubung, jumlah penurunan tekanan ketiga cabang tersebut nilainya sama dengan penurunan tekanan pada elemen pipa 5 yaitu 465,05 N/m^2.



Gambar 4.3. Grafik Debit Aliran pada Elemen Pipa

Pada perhitungan debit air, matrik eliminasi Gauss segitiga atas (A) mempunyai nilai yang lebih tinggi untuk elemen 2,3,4, dan 5 dari matrik eliminasi Gauss segitiga bawah (B), dan sebaliknya. Selisih nilai debit tertinggi terdapat pada perhitungan di elemen 1, kemudian elemen 5 dan 6. Selisih nilai debit yang terkecil terdapat pada 3 elemen yaitu 2, 3, dan 4.

Tabel 4.3. Pengujian Hukum Kontinuitas

Elemen / Matrik	Debit air pada elemen pipa (m^3/s)					
	Elemen pada pipa majemuk *input*			Elemen pada pipa majemuk *output*		
	1	2+5	1-(2+5)	4+5	6	(4+5)-6
A	30,50	30,50	0,00	30,50	24,33	6,17
B	43,75	26,37	17,38	26,37	26,37	0,00

Pada rangkaian pipa di gambar 2.1, elemen pipa 1 tersambung pada elemen pipa 2 dan elemen pipa 5 yang merupakan pipa majemuk. Air mengalir dari elemen pipa 2 ke elemen pipa 3, melewati elemen pipa 4 dan bertemu dengan aliran air dari elemen pipa 5 di titik p_5. Air dari elemen pipa 4 dan 5 keluar lewat elemen pipa 6, dimana elemen pipa 4, 5, dan 6 merupakan pipa majemuk.

Pengujian nilai debit pada pipa majemuk yang bercabang dua, terdapat antara nilai debit yang sama pada elemen 1 dengan penjumlahan debit pada cabang pipa elemen 2 dan 5, untuk matrik eliminasi Gauss segitiga atas. Pada eliminasi Gauss segitiga bawah, nilai yang sama adalah jumlah nilai debit cabang pipa elemen 5 dan 4 dengan elemen pipa 6. Hukum kontinuitas terpenuhi untuk debit masuk matrik segitiga atas dan debit keluar matrik segitiga bawah. Sedangkan perbedaan nilai yang terjadi untuk matrik segitiga atas cabang pipa elemen 6 dengan selisih nilai 6,17 atau 20,24 % kurang dari jumlah debit elemen 4 dan 5, serta matrik segitiga bawah cabang pipa elemen 1 dengan elemen 2 dan 5 dengan nilai selisih 17,38 atau 39,73% lebih besar dari nilai debit pada elemen 6. Ketidaksesuaian hukum kontinuitas terjadi pada hasil perhitungan eliminasi Gauss pada *augmented matrik* terhadap beda nilai tekanan yang di dapat lebih awal secara teotitis, yaitu nilai p_5 untuk matrik segitiga atas dan nilai p_2 untuk matrik segitiga bawah.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

1. Penerapan teori metode elemen hingga pada perhitungan nilai tekanan dan debit air pada pipa tertutup sesuai dengan hukum *Poiseuille*.

2. Penyelesaian perhitungan tekanan dan debit dengan metode eliminasi Gauss matrik segitiga atas dan bawah menghasilkan nilai yang berbeda namun mempunyai *trend* nilai yang sama dengan perbedaan nilai tekanan terbesar di elemen 5 sebesar 73 N/m^2 atau sekitar 6,06% dan perbedaan tekanan terkecil di elemen 6 sebesar 9,73 N/m^2 atau sekitar 0,81%. Perbedaan nilai debit terbesar terdapat pada elemen 1 yaitu sebesar 13,25 m^3/s dan yang terkecil sebesar 1,27 m^3/s pada elemen pipa 2, 3, dan 4.

3. Hukum kontinuitas terpenuhi pada debit aliran di pipa masuk untuk penyelesaian dengan eliminasi matrik segitiga atas untuk elemen pipa majemuk input 1,2 dan 5, dan debit keluar matrik segitiga bawah untuk lemen pipa majemuk output 4, 5, dan 6.

5.2. Saran

Perlu penelitian lanjutan untuk memilih metode yang memiliki *error* minimal untuk di lanjutkan ke perhitungan dengan metode komputasi.

DAFTAR PUSTAKA

Kosasih, Prabuono Buyung. 2012. Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga. Penerbit Andi. Yogyakarta.

Krisnawati. 2009. Studi kasus terhadap penyelesaian sistem persamanaan linear dengan eliminasi Gauss. Jurnal Dasi. Vol 10 No 1. ISSN 1411-3201.

Munson, Bruce R et all. 2013. *Fundamental of Fuid Mechanics*. Seventh Edition. John Willey & Sons Inc.

Munson, Bruce R et all. 2003. Mekanika Fluida. Alih bahasa oleh Harinaldi dan Budiarso. Edisi Keempat. Jilid 2. Penerbit Erlangga. Jakarta.

http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/01-intro.pdf diakses bulan September 2017.

http://dinus.ac.id/repository/docs/ajar/14-METODE_NUMERIK.pdf diakses bulan Oktober 2017.

http://p3m.amikom.ac.id/p3m/dasi/2010/DASIMaret2009/7%20-%20STMIK%20AMIKOM%20YOGYAKARTA%20-%20STUDI%20KASUS%20TERHADAP%20PENYELESAIAN%20SISTEM%20PERSAMANAAN%20LINEAR.pdf diakses bulan Oktober 2017

jurnal.untidar.ac.id/index.php/wahana/article/view/252/205 diakses bulan September 2017